

博弈论

zhx

必胜态和必败态

- 平等博弈和不平等博弈
 - 转移不取决于玩家，就是平等博弈。
- 平等博弈的必胜必败态定义：
 - 必胜态(N-position): 存在一个操作能使当前状态转移到必败态。
 - 必败态(P-position): 所有终止的状态都是必败态，或者该状态上的所有操作都会转移到必胜态。
- 不平等博弈的必胜必败态？

游戏状态转移的关系

- 如果游戏的状态转移图构成一个DAG
 - 则每个状态不是必败就是必胜
 - 递推可证
- 如果游戏的状态转移不是一个DAG?

Problem 1

- 有一个整数 S ($2 \leq S \leq 200$)，先手在 S 上减掉一个数 x ，至少是1，但小于 S 。之后双方轮流把 S 减掉一个正整数，但都不能超过先前一回合对方减掉的数的 k 倍，减到0的一方获胜。问先手是否必胜？

Problem 1

- 直接记忆化搜索!
- $dp[i][j]$ 表示当前剩下的数为 i , 最多能减的数为 j 的状态, $dp[i][j] = 1$ 必胜, 否则必败
- $dp[i][j] \rightarrow dp[i-x][x*k] (1 \leq x \leq j)$
- 如果对于某个 x , $dp[i-x][x*k] = 0$, 则 $dp[i][j]=1$, 否则 $dp[i][j]=0$
- 要求的为 $dp[S][S-1]$
- $O(S^3)$
- $S \leq 2000$?

Problem 1

- 一个性质: $dp[i][j]$ 关于 j 单调不减!
- 令 $f[i] = \min\{j | dp[i][j] = 1\}$
- 若 $x = f[i]$ 则 $dp[i-x][kx] = 0$ 且 $x = 1$ 或 $dp[i-(x-1)][k(x-1)] = 1$
- 即 $f[i-x] > kx$ 且 $f[i-(x-1)] \leq k(x-1)$
- 所以 $f[i] = \min\{j | f[i-j] > kj\}, f[0] = \text{inf}$
- $O(S^2)$
- 思考: 如果 $S \leq 2000000$?

复合游戏的和

- 状态由若干个独立的子游戏状态构成
 - 每次选择一个子游戏做一个该游戏合法的操作
- SG定理
 - 复合游戏的SG函数值等于子游戏的SG函数值的异或和

SG函数

- 如果游戏状态转移构成一个DAG
- SG函数
 - $SG(x)$ 为不在后继结点数值集合中的最小非负整数
 - 终止态的SG函数值为0
 - 必胜态的SG函数值大于0
 - 必败态的SG函数值等于0

NIM博弈

- 一堆石子，有 N 个，每次可取 $1-N$ 个。轮流取，不能取则输。
 - SG函数显然为 $SG(i)=i$
- N 堆石子？
 - 子游戏的和，SG函数异或即可，即为各堆石子数异或值
- 每次只能取 $1-k$ 个？

Problem 2

- $n+1$ 堆石子，最左边一堆石头有2012个，两个人分别进行操作。一次操作可以选取两堆不同的石堆分别增加或减少一个石子（一加一减，或给已经不剩石子的堆加一个都是允许的）。为了保证游戏会在有限步内结束，规定所选的两堆中右边的那一堆一定要包含奇数个石子，无路可走者输。问先手是否必胜？

Problem 2

- 将最左边一堆视为第0堆，将石子数为奇数的石子堆的编号异或起来，结果为0则先手必败，否则必胜
- 其实是转化为了NIM博弈

Problem 3

- 一堆石头N个，两个人轮流分。每次选择一个石堆，就地分成若干(大于1)堆，满足每堆之间的公差为1。不能分的那个人失败。
- 例如3只能分成1, 2
- 然后1,2都不能再分了。
- 假设两个人采取最优策略，问谁胜
- $N \leq 10^5$

Problem 3

- 递推求解SG函数
 - $SG(3)$ 后继只有 $SG(1,2)=SG(1) \text{ XOR } SG(2)=0$
 - 所以 $SG(3)=1$
 - $SG(6)$ 的后继只有 $SG(1,2,3)=1$
 - 所以 $SG(6)=0$
- 每次操作N至少少一半，记忆化搜索

Problem 4

- $1 \times N$ ($1 \leq N \leq 2000$) 的空格子，双方轮流操作，每次选一个没有被标记的格子，将其标记，如果某人操作完后，存在3个连续的格子都被标记了，那么他就获胜了，问先手是否有必胜策略？

Problem 4

- 一个性质：每次标记了某个格子后，它周围某些格子不能去标记！
- 每次相当于将其分成两段！
- 直接利用性质去求sg函数的值即可
- $O(N^2)$

Problem 5

- David 玩一个石子游戏。游戏中，有 n 堆石子，被编号为 $0..n-1$ 。两名玩家轮流取石子。每一轮游戏，每名玩家选取3堆石子 i, j, k ($i < j, j \leq k$, 且至少有一枚石子在第 i 堆石子中)，从 i 中取出一枚石子，并向 j, k 中各放入一枚石子(如果 $j=k$ 则向 k 中放入2颗石子)。最先不能取石子的人输。问先手是否有必胜策略。

Problem 5

- 原来的每堆石子数模2没有影响
- 把每一颗石子看成一堆
- 对于在第 i 堆的石子来说, 后继状态就是两颗分别在第 j 堆和第 k 堆的石子 ($i < j \leq k$)
- $O(n^3)$

Problem 6

- 有 N 堆石子放在 N 级楼梯上，楼梯编号为 $0..N-1$ ，每堆有 $a[n]$ 个石子。两人轮流游戏，每次将任意堆中的任意个石子移动到它下面那一层楼梯上， 0 号的石子不能动。直到所有石子都移动到 0 号，那个人就赢了。问先手是否有必胜策略。

Problem 6

- 子游戏SG函数求法
- 子游戏的独立性
- 重新构造sg函数
 - $$\begin{cases} gi = 0 & i = \text{even} \\ gi = n & i = \text{odd} \end{cases}$$
 - i 为阶梯标号
 - 答案为“子游戏”的异或和
 - 对于该sg函数，把奇数堆石子移到偶数堆，对应nim博弈中在一堆石子中取走石子。
 - 而把偶数堆石子移动到奇数堆石子是没有任何意义的。因为你能移动，对手也能做出同样的移动。

Problem 7

- $N \times M$ 的棋盘，每个格子有一定数量棋子，每次可将某个格子部分或全部棋子向右或向下移动，问谁赢。

Problem 7

- 到右下manhattan距离为奇数的才有作用

Problem 8

- 长度为 N 的环，每次可删掉连续的长度在 $[1, M]$ 的一段，问谁赢。

Problem 8

- 判断后手是否可将其分为两份一样的部分

Problem 9

- 给你 N 堆石子，现在你每次可以将一堆有 x 个的石子分为 k 和 k^x ，且 $k < x$ and $(k^x) < x$ ，并且每人有一次机会将某堆石子个数翻倍，问谁赢

Problem 9

- HDU4388
- 最后不能操作的堆中石子个数一定是2的某个次方
- 每次操作二进制中1的奇偶性不变

Problem 10

- 给你 n 个数 a_1, \dots, a_n , 现在两个人去构造一个数列 x : $x_0 = 0, x_i = x_{i-1} + a_j$ or $x_i = x_{i-1} - a_j$, 且 $x_{i-2} < x_i \leq K$, 问谁获胜

Problem 10

- HDU4371
- 每人必然选择 $+a_{\min}$
- 否则对手可以一直选 $-a_{\min}$

Problem 11

- 取石子游戏，你现在可以对每堆添加石子，问至少添加多少使得后手必胜， $N \leq 10$ ， $a_i \leq 10^6$ 。

Problem 11

- HDU4317
- $dp[i][S]$ 表示前 i 位满足条件，现在有 S 这些堆需要进位的情况下最少需要的石子数。

Problem 12

- 长度为 N 的排列
 - 每次可以选择长度为 $4x + 2$ 或者 $4x + 3$ 的区间进行翻转
 - 要求翻转之后使得字典序变大
-
- 问先手必胜还是必败
 - $N \leq 50$

Problem 12

- 每次翻转逆序对数量会奇偶变换
- 最终顺序对数量为0
- 所以只用判断一开始的逆序对数量即可
- BZOJ 4975

其他练习题

- 直接按定义依据胜负关系转移
 - 状态or转移需要一定代码功底(CF63E) 根据SG函数
 - 状态or转移需要一定代码功底(CF138D)
 - 暴力找规律然后证明(CF256C)
- 经典的模型的变形
- 对称操作的应用
- 暴力找规律(HDU4111)
- 自己推导(HDU4315)