

计数

zhx

基本计数原理

- 加法原理
- 乘法原理
- （你们应该都学过）

排列组合

- 组合：
- 从 n 个元素中选取 r 个元素，当不计顺序时，其方案数为：
- $C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
- 排列：
- 从 n 个元素中选取 r 个元素，当考虑顺序时，其方案数为：
- $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

Question 1

- 有 n 个不同元素
- 从中选 r 个，但是每个可以选多次（可重）
- 求证：其方案数为 $C(n + r - 1, r)$

Question 1

- 假设选 $a_1 \leq \dots \leq a_r$
- 转化为 $a_1, a_2 + 1, \dots, a_r + r - 1$

Question 2

- 有 n 个不同元素
- 从中选 r 个, 但是选择的元素不能相邻
- 求证: 其方案数为 $C(n - r + 1, r)$

组合数极其相关性质

- $C(n + m, n) = C(n + m, m)$
- $C(n, m) = C(n - 1, m - 1) + C(n - 1, m)$
- $C(n + r + 1, r) = C(n + r, r) + C(n + r - 1, r - 1) + \cdots + C(n, 0)$
- $C(n, l)C(l, r) = C(n, r)C(n - r, l - r)$
- $C(n, 0) + C(n, 1) + \cdots + C(n, n) = 2^n$
- $C(n, 0) - C(n, 1) + C(n, 2) - \cdots = 0$
- $C(r, r) + C(r + 1, r) + \cdots + C(n, r) = C(n + 1, r + 1)$
- $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k)x^{n-k} = \sum_{k=0}^n C(n, k)x^k$

Question 3

- 计算 $\sum_{k=1}^n k^2 C(n, k)$

Question 3

- 二项式求导
- $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n kC(n, k)x^{k-1}$
- $nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n kC(n, k)x^k$
- $n((1+x)^{n-1} + (n-1)x(1+x)^{n-2}) = \sum_{k=0}^n k^2 C(n, k)x^{k-1}$
- 取 $x = 1$
- $\sum_{k=1}^n k^2 C(n, k) = n(n+1)2^{n-2}$

Question 4

- 求 $\sum_{k=0}^n C(n, k)^2$

组合数取模

- 目标: $C(n, m) \bmod k$
- 情况一: $k = 1$, 过于麻烦, 跳过

组合数取模

- 目标: $C(n, m) \bmod k$
- 情况二: $k > 1, nm \leq 10^7$

组合数取模

- 目标: $C(n, m) \bmod k$
- 情况三: $n \leq 10^9, m \leq 10^4, k \leq 10^9$

组合数取模

- 目标: $C(n, m) \bmod k$
- 情况三: $n \leq 10^9, m \leq 10^4, k \leq 10^9$
- 核心要点: 上下相除至多只需要计算 $O(m)$ 项
- 方法一: 对每一项分解质因数, 快速幂合并
- 方法二: 逆元做除法, 中国剩余定理合并

组合数取模

- 目标: $C(n, m) \bmod k$
- 情况四: $n, m \leq 10^{10}$, k 为小质数

组合数取模

- 目标: $C(n, m) \bmod k$
- 情况四: $n, m \leq 10^{10}$, k 为小质数
- 卢卡斯定理

组合数取模

- 目标: $C(n, m) \bmod k$
- 情况五: $n, m \leq 10^9, k \leq 10^5$

组合数取模

- 质因数分解+中国剩余定理合并
- 对于单个质因子, 设为 p^k
- 则我们可以把 $n!$ 拆分成 p^k 的循环节, 顺便统计 p 的因子个数
- 再对 $p, 2p, \dots$ 单独处理
- $O(\log_p n)$

Problem 1

- 要求你把 x 拆成 k 个不同的组合数之和
- 只要 n_1 n_2 或者 m_1 m_2 不同 就叫做不同的组合数
- 输出任意一种方案
- $x \leq 10^9$ $k \leq 10^3$

Problem 1

- Luogu 4369

Problem 2

- 比较 $C(n_1, m_1)$ 和 $C(n_2, m_2)$ 的大小关系

Problem 2

- $C(n,m) = n! / m! / (n-m)!$

Problem 3

- 找到 k 个不同的组合数
- 使得这 k 个组合数的和最大
- 要求你找的组合数 $C(a,b)$ 满足 $0 \leq b \leq a \leq n$
- 求最大的和
- $n \leq 10^6$ $k \leq 10^5$

Problem 3

- Problem2+ 加上一个堆
- Luogu 4370

Problem 4

小葱在 NOIP 的时候学习了 C_i^j 和 k 的倍数关系，现在他想更进一步，研究更多关于组合数的性质。小葱发现， C_i^j 是否是 k 的倍数，取决于 $C_i^j \bmod k$ 是否等于 0，这个神奇的性质引发了小葱对 mod 运算（取余数运算）的兴趣。现在小葱选择了四个整数 n, p, k, r ，他想知道

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} C_{nk}^{ik+r} \right) \bmod p,$$

即

$$\left(C_{nk}^r + C_{nk}^{k+r} + C_{nk}^{2k+r} + \cdots + C_{nk}^{(n-1)k+r} + C_{nk}^{nk+r} + \cdots \right) \bmod p$$

的值。

Problem 4

- Luogu 3746

Problem 5

- 组合数 $C(n,m)$ 表示的是从 n 个物品中选出 m 个物品的方案数。举个例子，从 $(1,2,3)$ 三个物品中选择两个物品可以有 $(1,2),(1,3),(2,3)$ 这三种选择方法。根据组合数的定义，我们可以给出计算组合数 $C(n,m)$ 的一般公式：
- $C(n,m) = n! / m! * (n-m)!$
- 其中 $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ 。（额外的，当 $n=0$ 时， $n!=1$ ）
- 小葱想知道如果给定 n,m 和 k ，对于所有的 $0 \leq i \leq n$ ， $0 \leq j \leq \min(i,m)$ 有多少对 (i,j) 满足 $C(i,j)$ 是 k 的倍数。
- $1 \leq n,m \leq 10^{18}$ ， $1 \leq t,k \leq 100$ ，且 k 是一个质数

Problem 5

- 数位dp
- Bzoj 4737

抽屉原理

- 把 $n + 1$ 个物品放到 n 个抽屉里，则至少有一个抽屉含有两个或两个以上物品

Problem 6

- 给定 N 个数
- 要求从中选出任意多个数
- 使得他们和为 c 的倍数
- $c \leq N \leq 10^5$

Problem 6

- 随便找 c 个数
- 前缀和+抽屉原理
- POJ 3370

Problem 7

- N 种糖, 第 i 种有 a_i 个
 - 要求把所有糖吃光
 - 相邻两颗糖不一样
 - 能否吃光所有糖
-
- $N \leq 10^5, a_i \leq 10^5$

Problem 7

- 只需要检查最多的糖能否被剩下的糖隔开
- HDU 1205

Problem 8

- 平面上有个 N 个点 (x_i, y_i)
 - 用三个 $L \times L$ 的正方形覆盖所有点（平行于坐标轴）
 - 问最小的 L
-
- $N \leq 5 \times 10^4$

Problem 8

- 二分答案
- 矩形四个角一定有一个地方需要一个矩形
- 以此类推
- BZOJ 1052

容斥原理

- 现有 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 总共 n 个集合
- 现在已知任意多个子集交集的大小
- 则所有集合并集的大小为
- $\sum_{B \subseteq \{A_1, A_2, \dots, A_n\}} (-1)^{|B|+1} \cdot \left| \bigcap_{A_i \in B} A_i \right|$
- 此即为容斥原理

Problem 9

- N 个元素构成 2^N 个不同的子集
- 求选出若干个集合使得他们的交集大小为 K 的方案数
- $N \leq 10^6$

Problem 9

- $C(n, k)$ 选 k 个元素
- 再对剩下的集合进行容斥
- BZOJ 2839

Problem 10

- 网格中每步可以走 $(0 \cdots M_x, 0 \cdots M_y)$ 中任意非零向量
- 有 K 种向量不能走
- 分别是 (k_i, k_i) k_i 一定是10的倍数
- 求从 $(0,0)$ 走到 (T_x, T_y) 的方案数
- $T_x, T_y, M_x, M_y \leq 800, R \leq 1600, K \leq 50$

Problem 10

- $f[i][x][y]$ 表示走 i 步到 xy 方案数
- $g[i][z]$ 表示走 i 步到 $10z$ $10z$ 方案数
- 答案可容斥
- x 与 y 无关, 可分割
- TC SRM 498 Div1 1000PT

Problem 11

- 有一个长度为 n 的排列 a ，其中有一些位置被替换成了 -1 。你需要尝试恢复这个排列，将 -1 替换回数字。求有多少种可行的替换方法，满足得到的是一个排列，且不存在 $a_i = i$ 的位置。 $n \leq 2000$ 。

Problem 11

- 我们用一个 $n \times n$ 的棋盘来表示一个排列，第 i 行第 j 列如果被标记，则代表数字 i 填在了第 j 个位置 ($a_j = i$)。对于给定的排列，不为 -1 的位置已经被标记在棋盘上，而棋盘的主对角线上 ($a_i = i$) 不可以被标记。
- 从棋盘中删去不为 -1 的位置的列，以及已经出现了的数字的行，记此时棋盘大小为 N 。不难发现，每列不可被标记的位置至多只有1个，每行也是同样。记这种位置的数量为 M 。
- 令 $f[N, M]$ 表示，在这样的棋盘上标记 N 个格子的方案数。转移方程为： $f[n, m] = f[n, m - 1] - f[n - 1, m - 1]$ 边界为 $f[i, 0] = i!$ 。
- 转移方程的含义为，相比起 $f[n, m - 1]$ 的状态， $f[n, m]$ 的状态要多一个不可标记的位置，而标记了这个位置的方案数为 $f[n - 1, m - 1]$ ，因此从中减去。
- CF 198C

Problem 12

- 给定三视图的左视图和正视图的情况
- 求有多少种可能的情况
- $N, M \leq 100$

Problem 12

- 排序后对同高度进行容斥
- P99 T3

Problem 13

- 询问 $1 - N$ 中有多少个数可以表示成 $x^y, y > 1$ 的形式
- $N \leq 10^{18}$

Problem 13

- 可能的 y 的量非常非常少
- 直接枚举容斥
- HDU 2204

Problem 14

- $n \times m$ 的棋盘
- 要求有至少 r 行 c 列染成了黑色
- 剩下格子随意黑白
- 问方案数
- $n, m \leq 3000$

Problem 14

- 只考虑行则答案为
 - $\sum_{j=r}^n rongchi[j] \times C(n, j) \times 2^{(n-j)m}$
 - 容斥系数怎么算?
-
- HDU 6314

第二类斯特灵数

- 将 n 个不同的球放到 m 个盒子中，每个盒子不空的方法数为第二类斯特灵数，记为 $S(n, m)$

- $$S(n, m) = \frac{1}{m!} \sum_{t=0}^m (-1)^{m-t} C(m, t) t^n$$

第二类斯特灵数

- $S(n, 0) = S(0, n) = 0$
- $S(n, k) > 0$ 如果 $n \geq k \geq 1$
- $S(n, k) = 0$ 如果 $k > n \geq 1$
- $S(n, 1) = 1$
- $S(n, n) = 1$
- $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$
- $S(n, 3) = \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1) - 2^{n-1}$
- $S(n, n-1) = C(n, 2)$
- $S(n, n-2) = C(n, 3) + 3C(n, 4)$

放球问题

n 个球	m 个盒子	是否有空盒	方案数
有区别	有区别	可以有	
有区别	有区别	不可以	
有区别	无区别	可以有	
有区别	无区别	不可以	
无区别	有区别	可以有	
无区别	有区别	不可以	
无区别	无区别	可以有	
无区别	无区别	不可以	

放球问题

n 个球	m 个盒子	是否有空盒	方案数
有区别	有区别	可以有	m^n
有区别	有区别	不可以	$m! S(n, m)$
有区别	无区别	可以有	$\sum_{i=1}^{\min(n,m)} S(n, i)$
有区别	无区别	不可以	$S(n, m)$
无区别	有区别	可以有	$C(n + m - 1, n)$
无区别	有区别	不可以	$C(n - 1, m - 1)$
无区别	无区别	可以有	×
无区别	无区别	不可以	×

卡特兰数

- 将凸 n 边形划分成三角形的方案数
- 记为 $C(n)$
- 则
- $C(n) = C(2)C(n) + C(3)C(n-1) + \cdots + C(n)C(2)$

群论基础

- 满足四个条件的集合称为一个群:
- 封闭律: $a, b \in S, ab \in S$
- 结合律: $a(bc) = (ab)c$
- 幺元: $\exists e \in S, \forall b \in S, eb = be = b$
- 逆元: $\forall a \in S, \exists b \in S, s.t. ab = e$
- 阿贝尔群 (交换群)
- 交换律: $ab = ba$

置换群

- 将元素进行交换的群
- 如
- $\{e, (1,2), (1,3), (1,2,3), (1,3,2), (2,3)\}$

Burnside引理

- 设要对 n 个元素用 m 种颜色染色
- 对应置换群为 S ，在该置换群下任意一种置换得到的相同方案只算一种
- 则本质不同的染色方案数为：
 - $\frac{\sum_{s \in S} m^{\eta(s)}}{|S|}$
 - 其中 η 为置换的轨道数量
- (Polya不用管)

例子

- 六个点排成一圈，用三种颜色染色

例子

- 六种置换：

- 不动： 6

- 转1、5： 1

- 转2、4： 2

- 转3： 3

- 方案数

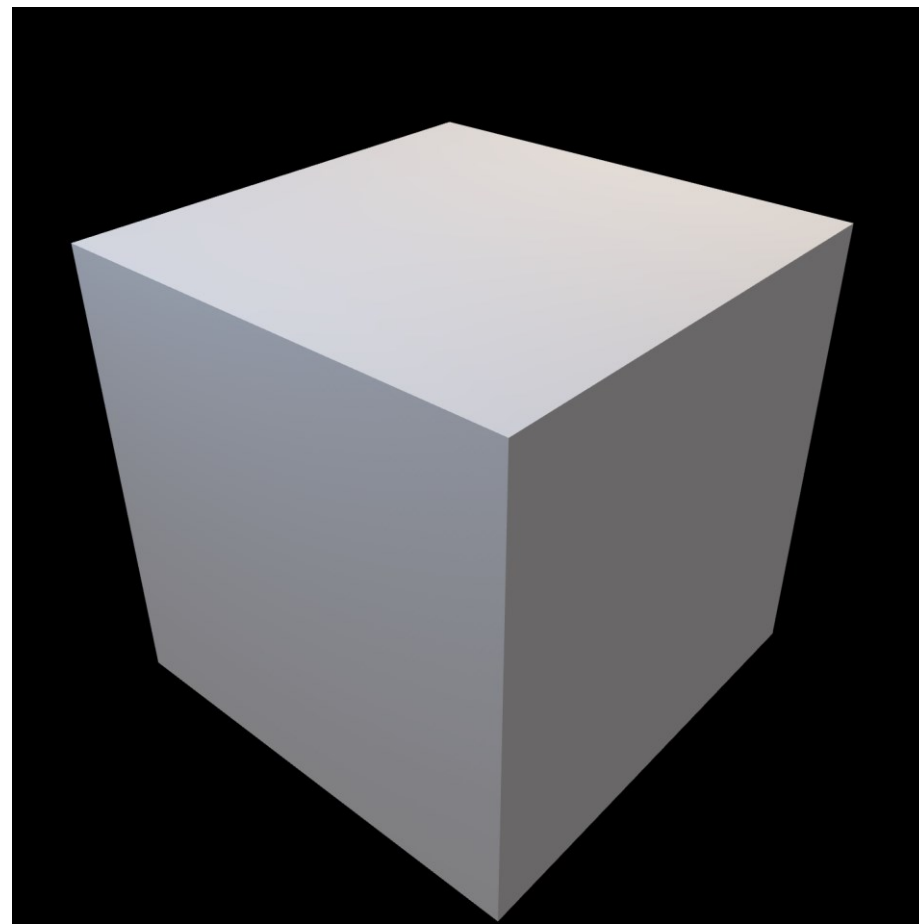
- $$\frac{3^6 + 2 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + 3^3}{6} = 130$$

Question 5

- 对 n 个排成一圈的点用 m 种颜色染色

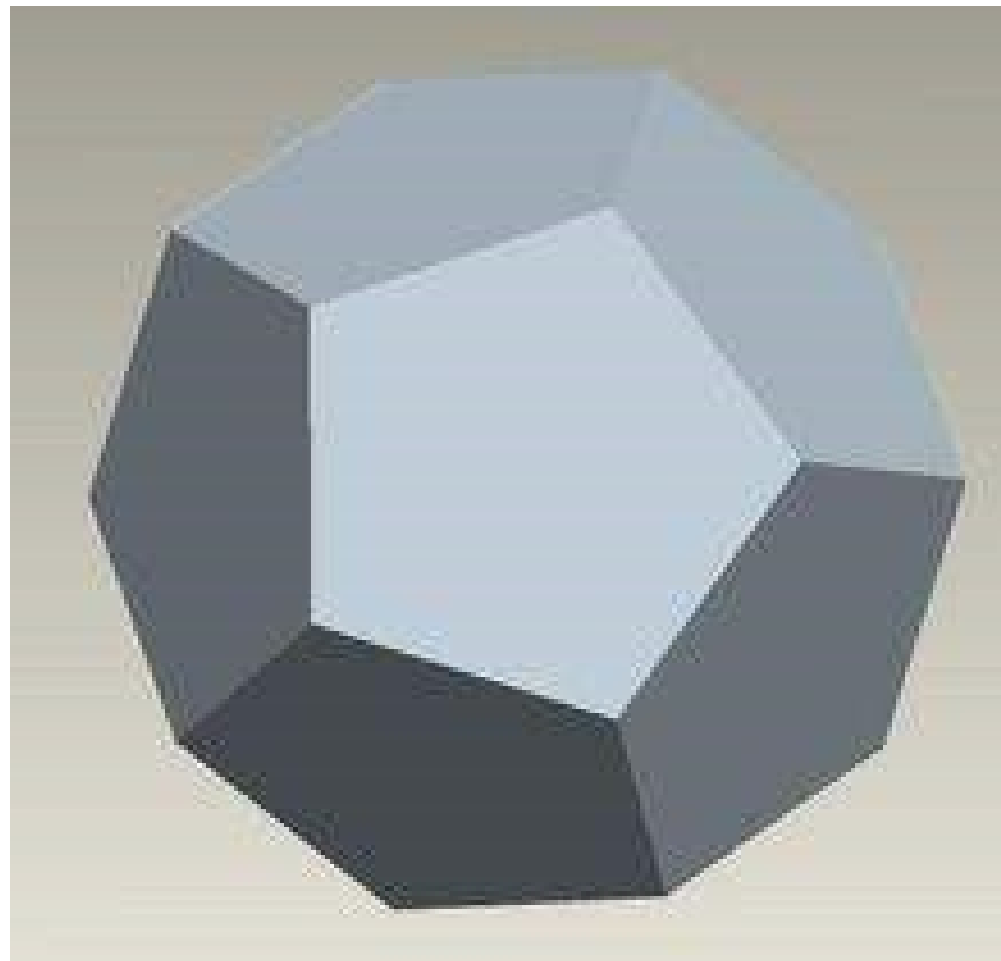
立体图形旋转置换

- 置换群
- 点染色
- 边染色
- 面染色



正十二面体

- 20个点
- 12个面
- 30条棱
- 外角和公式
- 点数* (360-角度) = 720



足球



Problem 15

- N 个人坐成一圈
 - 不能有超过 K 个女生相邻
 - 问方案数
-
- $N, K \leq 2000$

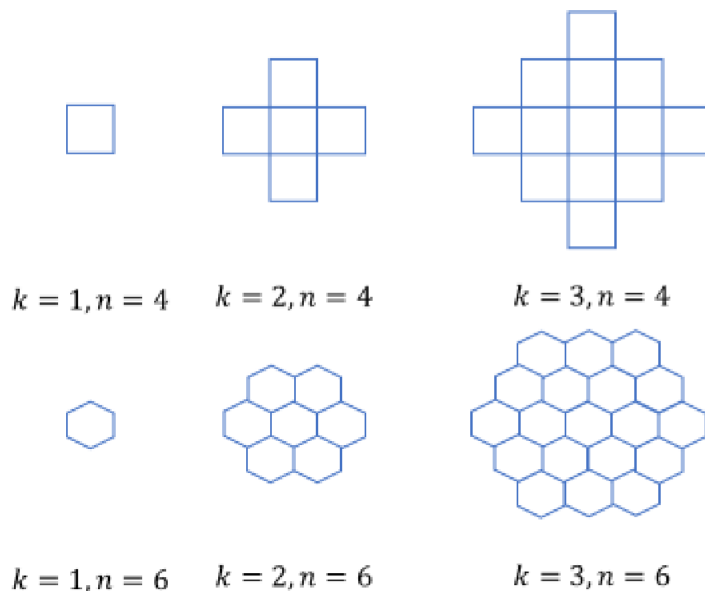
Problem 15

- 首先枚举置换长度
- 对一个长度内进行dp
- $f[i][j]$ 表示不考虑循环的情况下，考虑到前 i 个人，最后 j 个人是女生的方案数。
- $g[i][j]$ 表示不考虑循环的情况下，考虑到前 i 个人，保证第一个人是男生，最后 j 个人是女生的方案数。
- BZOJ 1547

Problem 16

众所周知，小葱同学擅长计算，尤其擅长计算组合数，但这个题和组合数没什么关系。

现在有一个迷宫，这个迷宫是由若干个正 $n(=4,6)$ 边形组成的 k 层迷宫。如果 $k=1$ ，那么该迷宫就由单独一个正 n 边形组成；如果 $k>1$ ，则在 $k-1$ 层的基础上，沿着所有最外层的边增加一个正 n 边形，新增加的正 n 边形若有重叠，则保留其中一个即可。具体可以参考下图：



现在为了打破迷宫的结界，你需要在迷宫的某些边上开一扇门。你总共需要开 r 扇门，每条边最多打开一扇门。但是如果两种开门的方案通过旋转相同，那么视为同一种方案。以及由于是死亡迷宫，所以死了也是可以的，所以你并不需要保证你开门的方案能够让你走出去。求总共的方案数。

Problem 16

- P134 T1

Problem 17

众所周知，小葱同学擅长计算，尤其擅长计算组合数，但这个题和组合数没什么关系。

正六面体，是一个六个面都是正方形的多面体。

正八面体，是一个八个面都是三角形的多面体。

如果我们的问题只是在正六面体或者正八面体上来做就太简单了，所以我们现在定义一种新的多面体：符文多面体。符文多面体由若干正三角形和正方形组成，正三角形边长和正方形边长一样。对于符文多面体的每个顶点，都与两个正三角形和两个正方形相连，且三角形和正方形交错排列。

有了符文多面体后，我们希望用 a 种颜色对正方形染色，用另外 b 种颜色对正三角形染色。但是如果两种染色方案可以通过旋转之后相同，则视为一种染色方案。问有多少种不同的染色方案？

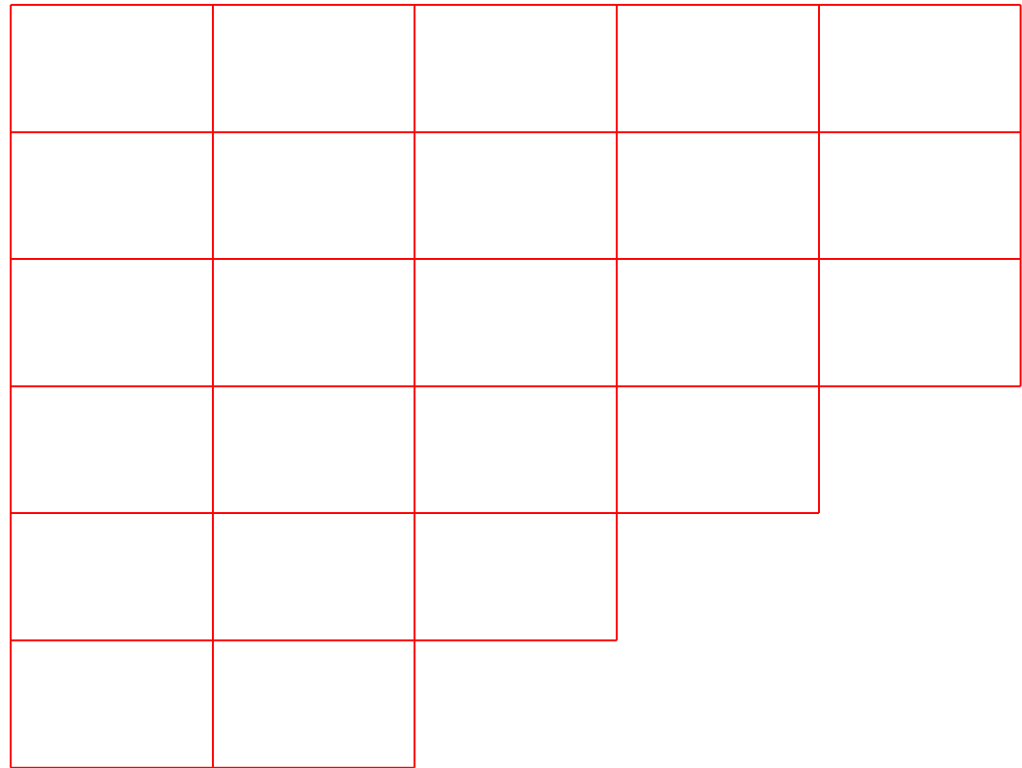
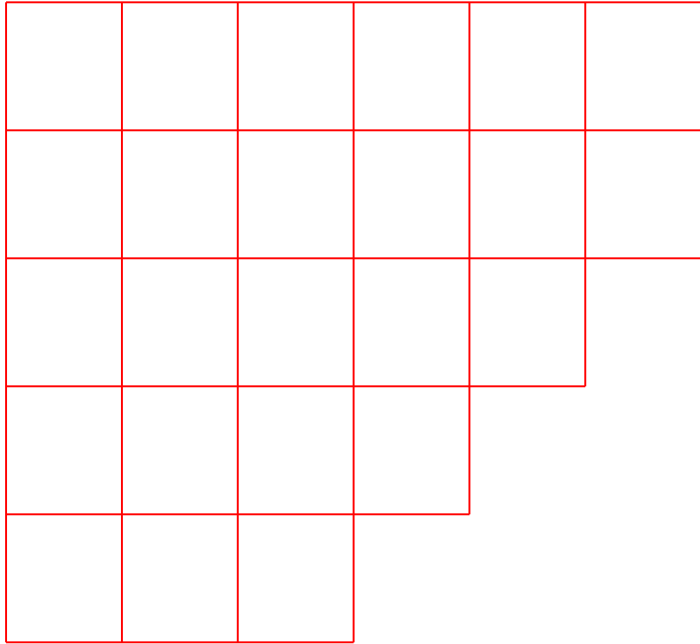
Problem 17

- P133 T1

整数拆分

- 将 n 拆分为若干个不为0的数的和的方案数称作整数拆分
- 证明：
- 整数 n 拆分成最大数为 k 的拆分数，和数 n 拆分成 k 个数的和的拆分数相等。

整数拆分



生成函数与母函数

- 数列 $\{a_0, a_1, \dots\}$
- 对应的生成函数为
- $G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$

- 比如 $A(x) = (1 + x)^n$
- 对应的数列为
- $C(n, 0), C(n, 1), \dots, C(n, n)$

Example 1

- 有1克、2克、3克、4克的砝码各一枚，能称出哪几种重量？每种重量各有几种可能方案？

Example 1

- $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^4)$

Example 2

- 求用1分、2分、3分的邮票贴出不同数值的方案数？

Example 2

- $(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)$

Example 3

- 设有 n 个标志为 $1, 2, \dots, n$ 的网袋, 第 i 个网袋里放有 n_i 个球。不同网袋里的球是不同的, 而同一网袋里的球则是没有差别的, 认为是相同的。询问从中取 r 个球的方案数。

Example 3

- $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n_1})(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n_2}) \cdots$

Example 4

- $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots$

Example 4

- $f(x) - xf(x) = 1$

- $f(x) = \frac{1}{1-x}$

- 同理

- $1 + x^k + x^{2k} + \dots = \frac{1}{1-x^k}$

Example 5

- 用生成函数求斐波那契数列通项公式

Example 5

- $f(x) = x + x^2 + 2x^3 + \dots$
- $f(x) - xf(x) = x + x^2 f(x)$
- $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$
- $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x} + \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}$
- $f_n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

线性常系数齐次递推关系

- 定义：如果序列 $\{a_n\}$ 满足
- $a_n + C_1 a_{n-1} + \cdots + C_k a_{n-k} = 0$
- $a_0 = d_0, a_1 = d_1, \cdots, a_{k-1} = d_{k-1}$
- 则特征多项式 $C(x) = x^k + C_1 x^{k-1} + \cdots + C_{k-1} x + C_k$

- 情况1:
- 如果 $C(x)$ 有 n 个不重复的根, 则
- $a_n = l_1 a_1^n + l_2 a_2^n + \cdots + l_n a_n^n$
- (三种情况的证明均比较复杂, 需要的前置知识过多)

线性常系数齐次递推关系

- 情况2:
- 有一对共轭复根 $\alpha_1 = \rho e^{i\theta}, \alpha_2 = \rho e^{-i\theta}$
- 则 $a_n = A\rho^n \cos n\theta + B\rho^n \sin n\theta$

线性常系数齐次递推关系

- 情况3:
 - 有一个 k 重根 α_1
 - 则
-
- $a_n = (A_0 + A_1n + \cdots + A_{k-1}n^{k-1})\alpha_1^n$

Problem 18

仰观咕咕之鸽，俯察米饭甚香。

众所周知，小葱同学擅长计算，尤其擅长计算组合数，但这个题和组合数没什么关系。

现在你有一个大小为 $3 \times N$ 的路面，以及三种不同大小的砖块： 1×1 , 2×2 以及两个直角边都为2的直角三角形砖。现在问有多少种不同的方案，能够使用这三种砖铺满整个路面且使用了偶数个 2×2 的砖？

Problem 18

- P132 T1

Problem 19

- 有 n 种糖果，每种 m_i 个，至少吃掉 a 个，至多 b 个，求吃掉糖果的方案数
- $N \leq 10$
- $a, b \leq 10^7$

Problem 19

- $\prod_{i=1}^n (1 + x + x^2 + \cdots + x^{m_i}) = \prod_{i=1}^n \frac{1-x^{m_i+1}}{1-x} = \frac{\prod_{i=1}^n 1-x^{m_i+1}}{(1-x)^n}$
- 直接暴力展开分子即可
- BZOJ 3027

Problem 20

为了提高智商，ZJY开始学习概率论。有一天，她想到了这样一个问题：对于一棵随机生成的 n 个结点的有根二叉树(所有互相不同构的形态等概率出现)，它的叶子节点数的期望是多少呢？

判断两棵树是否同构的伪代码如下：

算法 1: *boolCheck*($T1, T2$)

Require: 两棵树的节点 $T1, T2$

if $T1 == null \parallel T2 == null$ **then**

return $T1 == null \ \&\& \ T2 == null$

else

return $Check(T1 \rightarrow leftson, T2 \rightarrow leftson) \ \&\& \ Check(T1 \rightarrow rightson, T2 \rightarrow rightson)$

end if

Problem 20

- c_n 表示二叉树个数 $c_0 = 1, c_i = \sum_{j=0}^{i-1} c_j \times c_{i-j-1}$
- 令 p_n 代表答案
- 则 $p_n = \frac{\sum_{j=0}^{i-1} c_j \times c_{i-j-1} (p_i + p_{i-j-1})}{c_n}$
- 令 t_n 代表所有方案叶子节点个数之和
- 则 $t_n = \sum_{j=0}^{i-1} c_j t_{i-j-1} + c_{i-j-1} t_j = 2 \sum_{j=0}^{i-1} c_j t_{i-j-1}$

Problem 20

- 令 c, t 的生成函数为 F, G
- 则 $F(x) = xF(x)^2 + 1, G(x) = 2xF(x)G(x) + 1$
- $F(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}, G(x) = \frac{x}{\sqrt{1-4x}}$
- $(xF(x))' = G(x) \div x$
- $t_n = nc_{n-1}$
- $p_n = \frac{nc_{n-1}}{c_n} = \frac{n(n+1)}{2(2n-1)}$
- BZOJ 4001

Problem 21

- $n \leq 10^{500}$

明明这次又要出去旅游了，和上次不同的是，他这次要去宇宙探险！我们暂且不讨论他有多么NC，他又幻想了他应该带一些什么东西。理所当然的，你当然要帮他计算携带N件物品的方案数。他这次又准备带一些受欢迎的食物，如：蜜桃多啦，鸡块啦，承德汉堡等等当然，他又有一些稀奇古怪的限制：每种食物的限制如下：

承德汉堡：偶数个

可乐：0个或1个

鸡腿：0个，1个或2个

蜜桃多：奇数个

鸡块：4的倍数个

包子：0个，1个，2个或3个

土豆片炒肉：不超过一个。

面包：3的倍数个

注意，这里我们懒得考虑明明对于带的食物该怎么搭配着吃，也认为每种食物都是以‘个’为单位（反正是幻想嘛），只要总数加起来是N就算一种方案。因此，对于给出的N,你需要计算出方案数，并对10007取模。

Problem 21

- 写出每一个的生成函数乘起来之后得到 $f(x) = \frac{x}{(1-x)^4}$
- $f(x) = x(1-x)^{-4} = x \sum_{i=0}^{\infty} C_{i+3}^3 x^i$
- 所以答案为 $C(n+2, 3)$
- BZOJ 3028