

矩阵

排列和逆序对

- 排列的定义
- 逆序对的定义： τ
- 定义： 在一个排列中， 对换其中某两个数， 其余的数不动， 得到另一个排列， 这种操作称为一个对换。
- 定义： 如果一个排列的逆序数是偶数， 则称此排列为偶排列， 否则称为奇排列。

排列和逆序对

- 定理：对换改变排列的奇偶性。
- 定理：在全部 n 阶($n \geq 2$)排列中，奇偶排列各占一半。
- 定理：任意一个排列可经过一系列对换变成自然排列，并且所作对换次数的奇偶性与这个排列的奇偶性相同。

行列式

- 定义： N 阶行列式是由 N^2 个数 $a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 通过下式确定的一个数

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} \text{sgn}(j_1 j_2 \dots j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

- 也称为行列式的完全展开式。

- $$\text{sgn}(j_1 j_2 \dots j_n) = (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} = \begin{cases} 1 & j_1 j_2 \dots j_n \text{ 是偶排列} \\ -1 & j_1 j_2 \dots j_n \text{ 是奇排列} \end{cases}$$

行列式

- 引理：行列互换，值不变。
- 引理：用一个数乘行列式的某行等于用这个数乘此行列式。
- 引理：如果行列式中某一行是两组数之和，则这个行列式等于两个行列式之和，这两个行列式分别以这两组数为该行，而其余各行与原行列式对应各行相同。
- 引理：对换行列式中两行的位置，行列式反号。
- 引理：如果行列式中有两行成比例，则行列式等于0。
- 引理：把一行的某个倍数加到另一行，行列式的值不变。

矩阵

- 定义：由 mn 个数排成 m 行 n 列矩形的数表

- $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- 称为一个 $m \times n$ 的矩阵，记做 A 。其中 a_{ij} 称为第 i 行第 j 列的元素。

矩阵

- 特殊的矩阵种类:
- 零矩阵 0
- 对角矩阵
- 单位矩阵 I
- 纯量矩阵: $A = \text{diag}(c, c, \dots, c)$
- 上三角矩阵
- 下三角矩阵
- 对称矩阵
- 反对称矩阵

矩阵

- 定义：矩阵的相等
- 定义：矩阵的加法
- 定义：矩阵的数量乘法

矩阵乘法

- 定义：矩阵的乘法
- 设 $A = (a_{ij})_{m \times r}$, $B = (b_{ij})_{r \times n}$, 则矩阵 $C = (c_{ij})_{m \times n}$, 其中
- $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$
- 称为 A 与 B 的乘积, 记做 $C = AB$

矩阵乘法

- 矩阵乘法的一个重要例子：

$$\bullet \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

矩阵乘法

- 令 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$
- 则方程组可以写为 $Ax = b$

矩阵乘法

- 矩阵乘法的性质:
- $0A = 0, A0 = 0$
- $IA = A, AI = A$
- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$

逆矩阵

- 定义： 设 A 是 n 阶方阵,如果存在 n 阶方阵 B 使得 $AB = BA = I$
- 则称 A 是可逆的（或者非奇异的）， B 是 A 的一个逆矩阵。
- 否则称 A 是不可逆的（或奇异的）

逆矩阵

- 定理：逆矩阵如果存在，则逆矩阵唯一

逆矩阵

- 定义: \det 运算符
- 定理: 设 A, B 是 n 阶方阵, 则
- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
- 证明的提示: 构造 $\begin{vmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{vmatrix}$
- 引理: $\det(A_1 A_2 \dots A_s) = \det(A_1) \det(A_2) \dots \det(A_s)$

逆矩阵

- 引理：设 A 为 n 阶方阵， $AX = 0$ 有非零解的充分必要条件是 A 奇异。
- 引理：设 A 为 n 阶方阵，若 $\exists B$ 为 n 阶方阵，使得 $AB = I$ (或 $BA = I$)，则 A 可逆且 $A^{-1} = B$
- 引理：若 $\det(A) \neq 0$ ，则 $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

逆矩阵

- 逆矩阵的性质:
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$

逆矩阵

- 定理： 设 A 为 n 阶方阵， 若 A 可逆， 则线性方程组 $AX = b$ 有唯一解 $X = A^{-1}b$

初等变换

- 定义：矩阵的初等行（列）变换
 - 用一个非零的数乘以某行
 - 将某一行的 k 倍加到另一行
 - 互换两行
- 定义：单位阵 I 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵，

初等变换

- 初等矩阵:

- $$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \dots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \dots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

初等变换

- 初等矩阵:

- $$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \dots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \dots & \dots & & \\ & & \mu & \dots & 1 & \\ & & & & & \dots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

初等变换

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \dots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & \dots & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & \dots & & & \dots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & \dots & & & 0 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

初等变换

- 定理：用初等矩阵左（右）乘矩阵 A ，相当于对矩阵 A 实行相应的初等行（列）变换
- 定理：初等矩阵都可逆。

初等变换

- 定义：若矩阵 B 可以由矩阵 A 经过一系列初等变换得到，则称 A 与 B 相抵（等价），记做 $A \cong B$
- 定理：相抵是一种等价关系。

初等变换

- 初等变换求逆矩阵:
- 构造一个 $n \times 2n$ 的矩阵 $(A \ I)$
- $A^{-1}(A \ I) = (A^{-1}A \ A^{-1}I) = (I \ A^{-1})$
- $(A \ I) \rightarrow \cdots \rightarrow (I \ A^{-1})$ 一系列的初等变换

基尔霍夫矩阵

- 定义：如果图 G 有总共 N 个点，那么图 G 的基尔霍夫矩阵 D 可以表示为：
- $D_{ii} = \text{degree}(i)$
- $D_{ij} = -\text{cnt}(i, j)$

基尔霍夫矩阵

- 引理: $|D| = 0$
- 引理: 如果图 G 不连通, 任意余子式 $M_{ii} = 0$ 。
- 引理: 如果图 G 是一棵树, 那么任意余子式 $M_{ii} = 1$ 。
- 引理: 如果图 G 是一棵树, 那么给矩阵 D_{11} 加上1之后, 余子式 $M_{11} = 1$ 。

矩阵树定理

- 定理：给定图 G ，则图 G 的生成树的个数等于其对应的基尔霍夫矩阵的主余子式的值。

Binet-Cauchy定理

- 定理：如果矩阵 A, B 分别是 $n \times m$ 和 $m \times n$ 的矩阵， $C = A \times B$ ，那么有
- $|C| = \sum_{S \in \binom{[m]}{n}} |A_{n,S}| \times |B_{S,n}|$

矩阵树定理

- 证明:
- 对于图 G , 有 n 个点 m 条边的图, 构造点边相关矩阵 B
- 对于第 k 条边 $(i, j), i < j$, $B_{ik} = 1, B_{jk} = -1$ 。
- 则 $BB^T = D$
- 考虑 BB^T 和 M_{11} 的关系

相似矩阵

- 如果存在矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$
- 则这两个矩阵相似
- 记做 $A \sim B$

相似矩阵的性质

- $A \sim A$
- $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$
- $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$
- $A \sim B \Rightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(B), \text{tr}(A) = \text{tr}(B)$
- $A \sim B \Rightarrow |A| = |B|$
- $A \sim B \Rightarrow A, B$ 特征多项式相同

相关概念

- $rank$: 矩阵的秩, 矩阵行数减去未定元个数
- tr : 矩阵的迹, 对角线元素之和

矩阵特征值

- 如果数 λ 和向量 x 满足 $Ax = \lambda x$ ，则 λ 是 A 的特征值， x 是 A 的特征向量
- 系数行列式 $|A - \lambda E|$ 叫做 A 的特征多项式，特征多项式的 N 个根即为特征值
- 相似矩阵的特征值一定一样

矩阵对角化

- 转换成相似对角矩阵
- 特征值求法：解 n 次方程