

# 概率和期望

# 随机试验

- 随机试验：
  - (1) 不能预先确知结果
  - (2) 试验之前可以预测所有可能结果或范围
  - (3) 可以在相同条件下重复实验
- 样本空间：随机试验所有可能结果组成的集合
- 离散样本空间、无穷样本空间

# 随机事件

- 样本空间的任意一个子集称之为事件
- 事件发生：在一次试验中，事件的一个样本点发生
- 必然事件：样本空间全集
- 不可能事件：空集

# 事件的关系与运算

- 包含
- 相等
- 互斥
- 补
- 和
- 差
- 积

# 事件的运算律

- 交换律:  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- 结合律:  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- 分配律:  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 对偶律:  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

# 概率

- 定义：为样本空间的每一个事件定义一个实数，这个实数称为概率。事件 $A$ 的概率称为 $P[A]$ 。
- 1、 $P(A) \geq 0$
- 2、 $\sum P(A) = 1$
- 3、设 $A_1, A_2, \dots$ 是两两互不相容的事件，则有
- $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$

# 概率若干性质

- $P(\emptyset) = 0$
- 若  $A_1, A_2, \dots, A_n$  互不相交, 则  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$
- 如果  $A \subset B$ ,  $P(B - A) = P(B) - P(A)$
- 更一般的,  $P(B - A) = P(B) - P(AB)$
- $0 \leq P(A) \leq P(1)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

# 条件概率

- 则定义已知事件 $B$ 发生时事件 $A$ 发生的概率为 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$
- 乘法法则:  $P(AB) = P(A|B)P(B)$



# 条件概率性质

- $P(\emptyset|A) = 0$
- 设  $B_1, \dots, B_n$  互不相容, 则  $P(\cup_{i=1}^n B_i | A) = \sum_{i=1}^n P(B_i|A)$
- $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$
- $P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A) - P(BC|A)$

# 期望

- $E[f(X)] = \sum f(x)P(X = x)$
- 定理:
- $E[c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots] = c_1E[X_1] + c_2E[X_2] + \cdots$
- 如果 $X_1, X_2$ 独立, 则 $E[X_1X_2] = E[X_1]E[X_2]$
- 期望的和=和的期望

# Question 1

- 箱子里有三个1一个2, 每次取一个数不放回
- 事件 $A$ : 第一次取到1
- 事件 $B$ : 第二次取到1
- 求 $P(B|A)$

# 贝叶斯公式

- 设 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 是样本空间的划分
- 则有
- $$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum P(A|B_j)P(B_j)}$$

## Question 2

- 某电子设备厂所用的joy-con手柄是由三家制造商制造的， 且有如下数据

| 手柄制造厂 | 次品率  | 提供的份额 |
|-------|------|-------|
| 1     | 0.02 | 0.15  |
| 2     | 0.01 | 0.80  |
| 3     | 0.03 | 0.05  |

- 1、任取一个手柄， 是次品的概率为多少
- 2、任取一只， 若它是次品， 则由每个厂制造的概率分别是多少

# Question 3

- 对以往数据分析结果表明，当switch状态良好时，合格率为98%；当switch发生故障时，合格率为55%；当switch开机时，状态良好的概率是95%。已知某台switch开机的时候合格了，问该switch状态良好的概率是多少。

# 独立事件

- 如果 $P(AB) = P(A)P(B)$
- 那么 $AB$ 独立
- 不可能事件、必然事件和任何事件都是独立的

# 独立事件

- $A, B$  独立的  $P(B|A) = P(B)$



# Question 4.

假设有 3 张形状相同的卡片，其中一张两面都是黑色，一张两面都是红色，另一张是一面红一面黑，随机取出一张放在桌上，朝上的面为红色，那么另一面是黑色的概率是多少？

# Question 5.

$n$  个人按任一顺序依次抓阄，每个人抓完阄后立即打开，当某个人抓到“中”时，整个抓阄过程结束（后面的人就不必抓了）。问：此种抓阄方式是否公平，请说明理由。

# Question 6.

有 3 部电梯 5 名乘客, 假设乘客选择电梯是随机的, 求每部电梯至少有一名乘客的概率.

# Question 7.

一个人左右口袋里各放一盒火柴，每盒  $n$  支，每次抽烟时随机选一盒拿出一支用掉，由于习惯的原因，选右面口袋的概率是  $p > \frac{1}{2}$ 。问：下述两种情形的概率是否相等？试求概率的值。

- (1) 到某次他发现取出的这一盒已经空了，这时另一盒恰有  $m$  支火柴。
- (2) 到他用完某一盒时另一盒恰有  $m$  支火柴。

# Question 8.

假设袋中有  $a$  个黑球， $b$  个白球，每次取出一个球，并将其换成黑球放回，记第  $k$  次取出的是黑球的概率为  $P(B_k)$ ，求  $P(B_2)$ ， $P(B_3)$ ；若已知第二次取出的是黑球，则第三次取出的也是黑球的概率是多少？是否等于  $P(B_2)$ ？

## Question 9.

26. 设男女两性人口之比为 51:49. 又设男人色盲率为 2% , 女人色盲率为 0.25% . 现随机抽到一个人是色盲, 问“该人为男人”的概率是多少?

# Question 10

- 在小葱和小泽面前有三瓶药，其中有两瓶是毒药，每个人必须喝一瓶
- 小葱和小泽各自选了一瓶药，小泽手速比较快将药喝了下去，然后就挂掉了
- 小葱想活下去，他是应该喝掉手上的这瓶，还是另外剩下的一瓶呢？

# Question 11

- 小胡站在原点，手里拿着两枚硬币。抛第一枚硬币正面向上的概率为 $p$ ，第二枚正面向上的概率为 $q$ 。
- 小胡开始抛第一枚硬币，每次抛到反面小胡就向 $x$ 轴正方向走一步，直到抛到正面。
- 接下来小胡继续抛第一枚硬币，每次抛到反面小胡就向 $y$ 轴正方向走一步，直到抛到正面。
- 现在小胡想回来了，于是他开始抛第二枚硬币，如果小胡抛到正面小胡就向 $x$ 轴的负方向走一步，否则小胡就向 $y$ 轴的负方向走一步。
- 现在小胡想知道他在往回走的时候经过原点的概率是多少呢？



# Question 12

- 我们可以枚举小胡在第一轮中走到的点 $(x, y)$
- 小胡走到点 $(x, y)$ 的概率 $(1 - p)^{x+y} \times p^2$
- 小胡从点 $(x, y)$ 走回原点的概率
- $q^x \times (1 - q)^y \times \frac{(x+y)!}{x! \times y!}$

# Question 12

- 所以最终的概率为
- $\sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} (1-p)^{x+y} \times p^2 \times q^x \times (1-q)^y \times \frac{(x+y)!}{x! \times y!}$
- 不好求?
- 改变枚举量

# Question 12

$$\sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} (1-p)^{x+y} \times p^2 \times q^x \times (1-q)^y \times \frac{(x+y)!}{x! \times y!}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i (1-p)^i \times p^2 \times q^j \times (1-q)^{i-j} \times \binom{i}{j}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i \times p^2 \sum_{j=0}^i q^j \times (1-q)^{i-j} \times \binom{i}{j}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i \times p^2$$

$$= p$$

$$\binom{i}{j} = C_i^j = \frac{i!}{(i-j)! \times j!}$$

为什么?

# Question 13

- 小葱想要过河，过河有两条路
- 一条路有100个石头，每个石头有 $\frac{1}{100}$ 的概率会挂掉
- 一条路有1000个石头，每个石头有 $\frac{1}{1000}$ 的概率会挂掉
- 小葱应该走哪边呢？
- 请勿使用计算器

# Question 13

- $\left(\frac{999}{1000}\right)^{10} > \frac{999}{1000} \times \cdots \times \frac{990}{991} = \frac{99}{100}$
- $\left(\frac{999}{1000}\right)^{1000} > \left(\frac{99}{100}\right)^{100}$

# Question 14

- 小泽在数轴上的0点处
- 小泽每次有 $r$ 的概率向右走, 有 $1 - r$ 的概率向左走
- 问小泽走到 $-1$ 处的概率

# Question 14

- 如果直接列求和式计算
- 大量组合数求和, 卡特兰数, 级数
- 设答案为 $p$ , 则
- $p = 1 - r + r \times p^2$
- $rp^2 - p + 1 - r = 0$
- $p = 1$ 舍去  $p = \frac{1-r}{r}$
- 结束了?

# Problem 4

- 当 $r < \frac{1}{2}$ 时,  $p$ 是多少?
- 此时应有 $p = 1$



# Question 15

- 小胡有一棵一个点的树，小胡会给这个点浇水，于是这个点会有  $p$  的概率长出两个儿子节点。
- 每次长出新的节点之后，小胡又会给新的节点浇水，它们也都有  $p$  的概率长出两个新的儿子节点。
- 小胡不希望自己被累死，所以小胡希望知道这棵树的大小是有限的的概率。

# Question 15

- 稍加观察分析便可知道
- 这个问题与Problem 4一模一样
- 如何证明等价？

# Question 16

- 考虑Problem 4
- 我们希望求出小泽在能够走到 $-1$ 的情况下，走到 $-1$ 的期望步数
- 换句话说，我们需要排除掉所有走无穷步的情况

# Question 16

- 设答案为 $x$ , 则
- $x = 1 \times (1 - r) + r \times (1 + x + x)$
- $x = \frac{1}{1-2r}$

$$\begin{cases} \infty & \text{if } \frac{1}{2} \leq r \leq 1 \\ \frac{1}{1-2r} & \text{if } 0 \leq r < \frac{1}{2} \end{cases}$$

# Question 16

- 我们还需要删掉向右走到了无穷远的情况
- 假设 $p$ 是我们在Problem 4算出来的那个东西
- $x = 1 - r + r \times p^2 \times (1 + \frac{2x}{p})$
- $x = \frac{1-r}{(2r-1)r}$

$$\begin{cases} \frac{1-r}{(2r-1)r} & \text{if } \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ \infty & \text{if } r = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{1-2r} & \text{if } 0 \leq r < \frac{1}{2} \end{cases} \quad r = \frac{1}{2} \text{ 很有趣的情况}$$

# Problem 1

- 给出一个无向图，两个人初始在两个点上。当一个人 在一个点  $i$  上的时候，每一次，他有  $p[i]$  的概率留在原位，有  $1-p[i]$  的概率等概率地选择直接连边的一个点走出去。当两个人在同一时刻走到同一个点，那么他们相遇，过程结束。现在求他们在每一个点相遇的概率。
- $n \leq 20$

# Problem 1

- 将问题转换为期望次数
- $f[i][j]$ 表示在移动过程中该状态发生的期望次数
- 最后每个点的期望次数即为概率
- 高斯消元即可
- BZOJ 3270

# Problem 2

- $N$ 次挑战 容量为 $K$ 的包
- 依次 $1 - N$ 进行 $N$ 次挑战 第 $i$ 个挑战成功率为 $p_i$  属性为 $a_i$
- 如果 $a_i \geq 0$  挑战成功则容量增加 $a_i$
- 如果 $a_i = -1$ , 则挑战成功会得到一个体积为1的物品
- 至少要挑战成功 $L$ 次并且把所有得到的物品带走才算成功
- 问成功的概率
- $K \leq 2000, L \leq N \leq 200, -1 \leq a_i \leq 1000$



# Problem 2

- Dp+空间优化
- $F[i][j][k]$
- 前 $i$ 次成功 $j$ 次 体积还剩 $k$
- BZOJ 3029

# Problem 3

- 给定一棵树
  - 每条边有一定通电的概率
  - 每个点有一定充电的概率
  - 问期望有多少个点能有电
- 
- $N \leq 500000$

# Problem 3

- 转化为求每个点通电的概率
- $F[i]$ 表示子树内部能够使得 $i$ 通电的概率
- $G[i]$ 表示 $i$ 能够通电的概率
- $F[i]$ 树形dp搞定
- $G[i]$ 再dfs一次搞定
- BZOJ 3566

# Problem 4

- $N \times M$ 的格子
- 每次随机刷掉一个矩形
- 问 $K$ 次之后期望刷掉了多少个格子
- $N, M \leq 1000, K \leq 100$

# Problem 4

- 期望染的格子数=每个格子期望染的概率之和
- K次染一个格子的期望概率
- 补集转化
- BZOJ 2969

# Problem 5

- 检验矩阵 $A*B=C$ 是否成立
- $N \leq 1000$

# Problem 5

- $A:N*N$   $B:N*N$   $C:N*N$
- $D:N*1$  0和1组成的矩阵
- $A*B=C$
- $(A*B)*D=C*D$
- $A*(B*D)=C*D$
- 复杂度 $N^2$
- BZOJ 2396

# Problem 6

- 给定平面上 $N$ 个点
- 找到一个最小的圆覆盖住他们
- $N \leq 10^6$



# Problem 6

- 随机化

# Problem 7

- $N$ 次操作, 第 $i$ 次操作成功的概率为 $p_i$
  - 成功记为1否则记为0
  - 连续 $x$ 个1会贡献 $x^3$ 的分数
  - 求期望分数
- 
- $N \leq 10^5$

# Problem 7

- $f[i]$ 表示结尾部分期望长度
- $g[i]$ 表示结尾部分长度平方和的期望
- $h[i]$ 表示结尾部分长度三次方和的期望
  
- $f[i] = (f[i - 1] + 1) \times p[i]$
- $g[i] = (g[i - 1] + 2 \times f[i - 1] + 1) \times p[i]$
- $h[i] = (h[i - 1] + 3 \times g[i - 1] + 3 \times f[i - 1] + 1) \times p[i]$
- BZOJ 4318

# Problem 8

- 给定一个排列
  - 每次随机交换两个位置
  - 问最后期望的逆序对数量
- 
- $N \leq 5 \times 10^5, k \leq 10^9$

# Problem 8

- 考虑给定数对 $(A, B)$
- 如果 $A, B$ 不在给定位置上, 剩下每个位置的概率都相等
- 考虑 $(A, B), (B, A), (A, C), (C, A), (B, C), (C, B), (C, C)$ 这七种关系之间的转移即可
- BZOJ 5058