“用眼睛看，我们就不难证明它。”——李思

“注意，这些内容我是用黄粉笔写的。”——周杰

目录

1 群的基本概念

粗略地说，对称性是集合在某些变换下保持不变的性质。我们将通过最基本的例子来说明如何利用“群”这个代数结构来研究对称性。

一个集合 X 上的变换被定义为从 X 到 X 的双射。如果 X 是有限集，我们也可以把变换称为置换。把 X 上的全体置换记为集合 S_X（当 X 中有 n 个元素，也可记为 S_n），它拥有以下自然的性质：

（1）对任意 $f, g \in S_X$，都有 $fg \in S_X$。（fg 表示 f 与 g 的复合）

（2）对任意 $f, g, h \in S_X$，都有 $(fg)h = f(gh)$。

（3）存在恒等映射 $i_X \in S_X$，使得对任意 $f \in S_X$，都有 $fi_X = i_X f = f$。

（4）对任意 $f \in S_X$，都存在 $f^{-1} \in S_X$，满足 $ff^{-1} = f^{-1}f = i_X$。

这些性质对应的代数结构极有价值，我们把它抽象地定义为群，而 S_X 就是一个特殊的群，我们称之为置换群。严格的定义群需要先定义二元运算和运算律：

► 定义 1.1: 对于集合 S，我们把映射 $S \times S \to S$ 称为 S 上的二元运算。我们可以用乘法、加法等等形式的记号来表示二元运算。

（1）若 $(ab)c = a(bc)$ 对任意 $a, b, c \in S$ 都成立，则称 S 上的运算满足结合律。

（2）若 $ab = ba$ 对任意 $a, b \in S$ 都成立，则称 S 上的运算满足交换律。

二元运算暗含了集合对运算的封闭性。一般来说，结合律是比交换律更为基本。如果二元运算满足结合律，我们就能归纳地定义 n 个元素的计算，不再展开讨论。下面我们给出群的定义：

► 定义 1.2: 设 S 是一个非空集合，在 S 上存在一个二元运算，若：

（1）运算满足结合律。

（2）S 中存在单位元“1”。

（3）S 中任意元素“a”都有逆元“a^{-1} 或 $-a$”。

则称这个集合构成一个群 $(S, \cdot)$，或者群 G。

参照置换群的性质即可得知单位元和逆元的定义。不难证明，群中单位元是唯一的，一个元素的逆元也是唯一的。

若一个群的乘法适合交换律，则称这个群为交换群或 *Abel* 群。（当交换群的运算用加法“+”来表示，也称为加法群。）

若一个群只含有限个元素，则称之为有限群，否则就称为无限群。一般用 $|G|$ 表示 G 的元素个数（阶 order），若 $|G| = n$，则称 G 为 n 阶群。

数集 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 自然带有群结构，且确定不同的运算，对应的群也不同。数论中一个基本的例子是同余群：

▶ **例 1.1:** 设 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, 1, \cdots, n-1\}$，其元素为模 n 的同余类，可定义加法运算为取两元素和的同余类。$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 构成一个加法群，单位元为 0，i 的逆元为 $n-i$。我们还可以定义其上的乘法，但一个元素当且仅当它与 n 互素时才在集合中存在乘法逆元，乘法只可定义在如下子集上：

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{\overline{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} | (m, n) = 1\}$$

利用 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ 的群结构，我们可以证明（思路是考虑集合内所有元素的乘积）：若 p 是一个素数，则

$$p | (p-1)! + 1$$

另外几个常见的例子：

▶ **例 1.2:** 记由八个元素组成的集合 $Q_s = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$，定义乘法运算：

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

可以验证 Q_s 是一个非交换群，我们称之为四元数群（Quaternion group）。

▶ **例 1.3:** 设 $V = \{1, a, b, c\}$，定义运算：

$$\begin{aligned} &a^2 = b^2 = c^2 = 1 \\ &ab = ba = c \quad bc = cb = a \quad ca = ac = b \end{aligned}$$

可以验证 V 是一个 Abel 群，且满足：

$$abc = 1$$

我们称之为 Klein 四元数群。Klein 四元数群可应用于解决 Peg Solitaire 游戏产生的有趣问题（此处不详细展开）。

▶ **例 1.4:** 二面体群（Dihedral group）指平面正 n 边形的对称群，其包含 n 个旋转变换和 n 个反射变换（变换前后完全对称的正 n 边形保持不变），确定运算为变换的复合。一般记该群为 D_n，其中 $|D_n| = 2n$。

记 r 为逆时针旋转 $2\pi/n$ 度，则可知群中的旋转变换包含 $1, r, \cdots, r^{n-1}$；记 s 为以某一个轴进行的反射（显然 $s^2 = 1$），可知反射包含 $s, rs, r^2 s, \cdots, r^{n-1} s$（分别对应 n 根对称轴）。所以我们可以得到群中的所有元素：

$$D_n = \{1, r, \cdots, r^{n-1}, s, rs, \cdots, r^{n-1} s\}$$

不妨思考：以上内容是否已经说明了 D_n 对变换的复合是封闭的？

我们回过头来研究置换群的性质。方便起见，我们可以用矩阵来表示有限群 X（不妨记 $X=\{1,2,\cdots,n\}$）上的置换：

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

它表示置换 $\sigma: k\mapsto i_k(k=1,2,\cdots,n)$。对于一类置换，我们可以把它简写为轮换：

$$(i_1,i_2,\cdots,i_k)=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_1 \end{pmatrix}$$

不难证明，所有的置换都可以表示为一些轮换的乘积。特别地，所有轮换还可以表示为一些长度为 2 的轮换——即对换的乘积。注意以上表示不具有唯一性。置换群的性质不够明显，我们需要用一些手段来简化问题。

下面我们引入子群的概念。

▶ **定义 1.3: 设 G 是一个群，$H\subset G$。若 H 在 G 的运算下也成为一个群（满足乘法封闭、求逆封闭），则称 H 是 G 的子群，记为 $H\leq G$。**

为了方便判断，我们有时会用到如下判则：

$$H\leq G \Leftrightarrow \forall a,b\in H, ab^{-1}\in H$$

借此可以证明，任意多个 G 的子群的交仍是 G 的子群。但注意：子群的并不一定是子群。

对于 G 的任意一个子集 S，我们都可以找到一个包含 S 的最小子群，我们称这个子群是由 S 生成的子群，记为 $<S>$。比如二面体群 $D_n=<\{r,s\}>$。

最特殊的情况，当 $S=\{g\}$ 时，$<g>$ 表示由一个元素生成的子群，我们称之为循环群。如果存在自然数 n，使得 $g^n=1$，那么 $<g>$ 就是一个 n 阶群，所以有时我们也称 n 是元素 g 的阶（或称周期）。

一个不太平凡的结论是循环群的子群都是循环群，证明它需要用一下整数的带余除法。我们不难看出，循环群与 $\mathbb{Z}$ 或者 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 存在本质上的联系，而群同态就是描述这种联系的方法。

▶ **定义 1.4: 设 G_1,G_2 都是群，$f:G_1\to G_2$。若对任意的 $a,b\in G_1$，都有**

$$f(ab)=f(a)f(b)$$

则称 f 是群 G_1 到 G_2 的同态。不难自然地定义单同态、满同态。既是单同态又是满同态的群同态被称为群同构。若 G_1,G_2 之间存在群同构，则称群 G_1,G_2 同构，记为 $G_1\cong G_2$。

可以证明无限循环群同构于 $\mathbb{Z}$ 的加法群，而 n 阶循环群同构于 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$。实际上，它们作为群的性质没有区别。

举一些例子：

▶ 例 1.5: **我们把平面正 n 边形依次标记 $1, 2, \cdots, n$，这样我们就有了一种方法把二面体群 D_n 中的元素对应为 S_n 中的元素，记这种对应关系为 $\rho : D_n \to S_n$，可以验证这定义了一个单同态。所以有：**

$$D_3 \cong S_3$$

▶ 例 1.6: **交错群是置换群的一个子群，但在定义它之前我们首先需要对置换进行分类（我们后面会给出一个更细的分类）。**

考虑下面的多项式：

$$P(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

定义：

$$\forall \sigma \in S_n, \sigma(P)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$$

进一步定义：

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \frac{\sigma(P)}{P}$$

可直接验证 sgn 是从 S_n 到 $\{\pm 1\}$ 的满同态。而如果 σ 是一个对换，则显然 $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$。所以任一置换表示成对换乘积之后，对换个数的奇偶性就被唯一确定了。据此我们将置换分为奇置换和偶置换，而且 S_n 中全体偶置换构成 S_n 的子群，我们称之为交错群 A_n。

奇置换和偶置换之间是一一对应的，所以有 $|A_n| = |S_n|/2 = n!/2$。

交错群的一个有趣应用与 n-Puzzle 数字推盘游戏有关，此处不再展开。

一开始我们从置换群中抽象出群的概念，现在我们又要把一般的群放回置换群中去。把群元素看成某个集合上的置换，群对集合元素的作用，可以反映出群本身的性质。这种“具体化”的想法由群作用来实现：

▶ 定义 1.5: **设 X 是一个集合，G 是一个群，若映射 $\rho : G \to S_X$ 为一个群同态，则称 ρ 是 G 在 X 上的一个群作用，记：**

$$\rho : x \mapsto gx = \rho(g)x, \forall g \in G, x \in X$$

ρ 是一个群同态意味着：

$$g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x$$

特别地，当 ρ 是一个单同态时，称它是忠实的（faithful）。

为了方便，在不引起误解的情况下，我们经常用 $G \curvearrowright X$ 来表示我们定义了 G 在 X 上的群作用。$G \curvearrowright X$ 说明我们可以把 $g \in G$ 看成集合 X 上的一个置换。

最自然的群作用是 $S_X \curvearrowright X$。另一个我们给过的例子是二面体群 D_n 在平面多边形顶点集上的作用。我们还可以让群作用于另一个群，最简单的例子有：

▶ **例 1.7: 左正则表示**：$L : G \to S_G, g \mapsto L_g$，**其中**

$$L_g : G \to G, h \to gh$$

类似地可定义右正则表示。对于给定的元素 g 与子群 $H \leq G$，我们可以确定一个子集：

$$gH = \{gh|h \in H\}$$

我们称 gH 是 H 的一个左陪集，且 $gH \leq G$。可以验证，两个陪集要么重合，要么没有交集。

▶ **例 1.8: 共轭表示**：$\mathrm{Ad} : G \to S_G, g \mapsto \mathrm{Ad}_g$，**其中**

$$\mathrm{Ad}_g : G \to G, h \mapsto ghg^{-1}$$

不仅 Ad 是一个群同态，Ad_g 也是一个群同态。所以 Ad 的性质比一般群作用还要好一些。同样地我们可以通过共轭表示确定子群 $gHg^{-1} \leq G$，我们称 gHg^{-1} 是与 H 共轭的一个子群。

从这两个例子中，我们抽象出以下重要概念：

▶ **定义 1.6:**

设群 G 作用在集合 X 上，对某个 $x \in X$，X 的子集：

$$\mathrm{orb}(x) = \{gx|g \in G\}$$

我们称之为 G 过 x 的一个轨道，有时可以简记为 Gx。而 G 的子集：

$$\mathrm{stab}(x) = \{g \in G|gx = x\}$$

组成 G 的一个子群（易证），称为 x 的稳定子群。

直观上（并且可以验证），轨道给出了 X 上的一个等价关系：a 等价于 b 当且仅当 a, b 属于同一轨道。该等价关系就确定了集合 X 的一个拆分（即 X 可表示为一些子集的不交并），我们记商集为 X/G（即所有轨道的集合）。

特别地，如果我们取群作用为左正则表示，那么子群 $H \leq G$ 在 G 上的作用将 G 进行了轨道分解，而这些轨道就是 H 的右陪集，所以对一般的 $H \leq G$ 我们都可以做 G 的陪集分解。陪集分解可推出子群的一个有趣性质：

▶ **定理 1.1:** （Lagrange **定理**）

若 H **是有限群** G **的子群，则** $|H|$ **整除** $|G|$。

证明它我们只需要再说明 G 的不同陪集之间存在双射即可，而这又是显然的（考虑 $g_1h \mapsto g_2h$）。Lagrange 定理可帮助我们进一步理解群结构，比如：它说明了有限群中一个元素的阶必定整除群的阶，或者说必定有 $g^{|G|}=1$。

▶ **例 1.9: 考虑群** $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$，**显然** $(a,n)=1$ **且** $a<n$ **时，有：**

$$\overline{a}^{|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*|}=\overline{1}$$

这等价于数论中的 Euler **定理：**

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1(\mod n)$$

群作用是共轭表示时，群 G 对自身的共轭作用将自己进行了共轭类的拆分：

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow \exists g \in G, s.t. g_1 = g g_2 g^{-1}$$

▶ **例 1.10: 关于置换群的一个更细的分类：置换群的共轭类由置换群的型给出。将** $\sigma \in S_n$ **表示为轮换的乘积，其中长为** r **的轮换的个数有** λ_r **个，则称** σ **的型为** $[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k]$，**由定义可知：**

$$\sum_{i=1}^{k} i\lambda_i = n$$

而两个置换共轭（属于同一共轭类）的充要条件是它们有相同的型。如果 σ_1, σ_2 **有相同的型，且按对应顺序表示为轮换的乘积：**

$$\sigma_1 = (i_1, \cdots)\cdots(\cdots, i_n), \sigma_2 = (j_1, \cdots)\cdots(\cdots, j_n)$$

则：

$$g = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

即使得：$\sigma_2 = g\sigma_1 g^{-1}$。

以上的讨论可以推广到一般的群作用中：

▶ **定理 1.2:** （**群作用基本定理**）

设群 $G \curvearrowright X$，**则：**

（1）**同一轨道上不同点的稳定子群是相互共轭的，即**

$$\mathrm{stab}(gx) = g(\mathrm{stab}(x))g^{-1}$$

（2）由（1），一条轨道上的所有稳定子群构成了 G 的一个拆分。且轨道上的点与稳定子群的陪集是一一对应的。

（3）$|G| = |\mathrm{stab}(x)||\mathrm{orb}(x)|, \forall x \in X$。

直接验证即可证明。这个定理说明了群作用 $G \curvearrowright X$ 不仅确定了 X 的轨道分解，还通过 X 的每一条轨道确定了 G 的一个拆分，而且这个拆分即是陪集分解的一般推广。

▶ **例 1.11: 试证明：六面骰子有且仅有 30 种。**

还有一个组合学常用的引理：

▶ **引理 1.1:（Burnside 引理）**

设有限群 G 作用于有限集合 X，记：

$$X^g = \{x \in X | gx = x\}, g \in G$$

则有：

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

证明: 证明的思路是"用两种计算方法计算同一对象"。考虑：

$$Z = \{(x, g) \in X \times G | gx = x\} \subset X \times G$$

定义：

$$\pi_X : Z \to X, (x, g) \mapsto x; \quad \pi_G : Z \to G, (x, g) \mapsto g$$

则：$\pi_X^{-1}(x) = \mathrm{stab}(x), \pi_G^{-1}(g) = X^g$，所以：

$$Z = \sum_{x \in X} |\mathrm{stab}(x)| = \sum_{g \in G} |X^g|$$

即可推出原等式。

另一方面，陪集分解给出了商集 G/H，有时我们希望 G/H 也具有群结构。但它在一般而言不满足群的条件，所以使 G/H 具有群结构的子群 H 的性质是很好的。

▶ **定义 1.7: 若对任意的 $g \in G$，$H \leq G$ 都满足 $gH = Hg$，则称 H 是 G 的正规子群，记为 $H \lhd G$。**

有时我们也会用到如下判则：

$$H \lhd G \Leftrightarrow \forall g \in G, h \in H, \text{满足} ghg^{-1} \in H$$

设 $H \lhd G$，我们定义 G/H 上的一个二元运算为 $g_1H \cdot g_2H = g_1g_2H$。这个二元运算是良好定义的，即：

$$g_1H = \widetilde{g}_1H, g_2H = \widetilde{g}_2H \Rightarrow g_1g_2H = \widetilde{g}_1\widetilde{g}_2H$$

进一步可以验证在该运算下，G/H 具有自然地群结构，我们称之为商群。实际上，当且仅当一个子群是正规子群时，我们才能用如上步骤构造商群。在直观上，我们可以认为商群是把群中一些元素"粘起来"得到的新结构，我们常常用它研究不同群之间的关系。比如下面的定理：

▶ **定理 1.3:（群同态基本定理）**

已知群 G 到 H 的同态 f，记：

$$\mathrm{ker}f = \{g \in G | f(g) = 1\}, \mathrm{im}f = f(G)$$

则 $\mathrm{ker}f \lhd G, \mathrm{im}f \leq H$，且：

$$\mathrm{im}f \cong G/\mathrm{ker}f$$

由该定理我们得到如下图表交换：

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta"'] & H \\ G/\mathrm{ker}f \arrow[r, "\overline{f}"] & \mathrm{im}f \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

其中 $\eta : g \mapsto [g]$，$[g]$ 为 g 所处的等价类，而 j 为嵌入映射。验证以上映射均是群同态且 $\overline{f}$ 是群同构即可。

主要的理论内容到此基本介绍完成，但我们还需要大量的例子来帮助我们加深理解，而且我们尚没有看到几何的门口。度量空间就是我们需要的载体：

▶ **定义 1.8: 在集合 X 上定义 $d : X \times X \to \mathbb{R}$，如果满足：**

（1）**对称性：** $d(x, y) = d(y, x)$

（2）**正定性：** $d(x, y) \geq 0$，**且** $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

（3）**三角不等式：** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

则称 d 是 X 上的一个度量，(X, d) 是一个度量空间。

▶ **定义 1.9: 若度量空间 (X, d) 上的变换 $f : X \to X$ 满足：**

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y), \forall x, y \in X$$

则称 f 是 (X, d) 上的一个等距同构。(X, d) 上的所有等距同构构成一个群，运算取变换复合，记为 $\mathrm{Isom}(X)$。

不难验证等距同构群是 S_X 的一个子群。

▶ **例 1.12: 本章只处理两个最常见的度量空间：欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 与酉空间 $\mathbb{C}^n$。它们都具有自然的线性结构，而且定义了内积：**

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \forall x, y \in \mathbb{R}^n; < x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}, \forall x, y \in \mathbb{C}^n$$

这两个空间都自然定义了度量：

$$d(x, y) = \sqrt{< x - y, x - y >}$$

记 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 的一组标准正交基。如果 f 是一个 $\mathbb{R}^n$ 上的等距同构，那么 $f(x+y)$ 的第 i 个坐标为：

$$\varphi(x+y)_i =< \varphi(x+y), e_i >=< x + y, \varphi^{-1}(e_i) >= (\varphi(x) + \varphi(y))_i$$

所以有：

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

通过类似的方法我们可以证明：$\mathbb{R}^n$（或 $\mathbb{C}^n$）上的等距同构必定是 $\mathbb{R}^n$（或 $\mathbb{C}^n$）上的线性变换。

我们知道，取定空间中的一组基之后，我们就可以把线性变换与矩阵一一对应起来。在这里我们就不再仔细区分线性变换与矩阵（除非需要换基的时候），利用它们的联系来解决问题：

▶ **定义 1.10: 下面的 K 指代 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$，群的运算均取矩阵乘法（线性变换的复合）。**

n **维一般线性群**：$\mathrm{GL}_n(K) = \{A \in M_n(K) | \det A \neq 0\}$

n **维特殊线性群**：$\mathrm{SL}_n(K) = \{A \in M_n(K) | \det A = 1\}$

n **维正交群**：$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | A'A = I_n\}$

n **维特殊正交群**：$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) | \det A = 1\}$

n **维酉群**：$\mathrm{U}_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}) | A^H A = I_n\}$

n **维特殊酉群**：$\mathrm{SU}_n = \{A \in \mathrm{U}_n | \det A = 1\}$

可以证明，有下面的一一对应：

$\mathrm{GL}_n(K) \Leftrightarrow K^n$ 上可逆线性变换

$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathbb{R}^n$ 上保持原点的等距同构

$\mathrm{U}_n \Leftrightarrow \mathbb{C}^n$ 上保持原点的等距同构

我们借此来讨论一些具体的情况：

▶ 例 1.13: $\mathbb{R}^n$ **上等距同构有旋转、反射和平移。我们可以通过复合平移，把任意一个等距同构转化为保持原点的等距同构。**

根据线性代数中的 Cartan–Dieudonné **定理，我们可以把任意一个** $\mathbb{R}^n$ **上保持原点的等距同构写成至多** n **个反射的复合。借此我们可以把二维空间中保持原点的等距同构分为旋转和反射两类，把三维空间中保持原点的等距同构分为旋转、反射、旋转与反射的复合（旋转轴与反射面垂直）。比如：**

$$\text{逆时针旋转 } \theta\text{:} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \text{关于 } xy \text{ 平面反射:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

▶ 定理 1.4:

（1） $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ **的有限子群同构于有限阶循环群；** $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ **的有限子群同构于有限阶循环群或二面体群。**

（2） $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ **的有限子群同构于有限阶循环群，二面体群，或者某个** Plato **多面体的旋转对称群。**

定理的证明较为繁琐，这里就略去了，但 Plato 多面体的自同构群是值得了解的内容。

我们下面把等距同构推广到更大的范围：

▶ 定义 1.11: 对于 K^n **上的变换** $f: K^n \to K^n$**，如果存在** $A \in M_n(K)$ **和** $u \in K^n$**，使得：**

$$f(x) = Ax + u, \forall x \in K^n$$

则称 f **是** K^n **上的仿射变换。**

任意一个仿射变换都可以写成平移和线性变换的复合。易证：当且仅当 A 可逆时，仿射变换可逆。由此我们不难得到：

▶ 定义 1.12: K^n **上所有仿射变换构成一个群，我们称之为仿射变换群，记为** $\mathrm{Aff}_n(K)$**。**

我们还有一个便于计算的方法：

$$\Sigma : \mathrm{Aff}_n(K) \to \mathrm{GL}_{n+1}(K), (f : x \mapsto Ax + u) \mapsto \begin{pmatrix} A & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可以验证 Σ 是一个群的单同态，所以我们可以用矩阵来表示仿射变换。又由于 $A \mapsto (f : x \mapsto Ax)$ 是一个单同态，所以我们可以认为：

$$\mathrm{GL}_n(K) \le \mathrm{Aff}_n(K) \le \mathrm{GL}_{n+1}(K)$$

显然，我们有如下关系：

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \leq \mathrm{Aff}_n(\mathbb{R}), K^n \cong \mathrm{T}_n(K) \lhd \mathrm{Aff}_n(K)$$

其中 $\mathrm{T}_n(K)$ 为 K^n 上所有平移构成的群。考虑 $\pi : (f : x \mapsto Ax + u) \mapsto A$，$\pi$ 是一个满同态且 $\ker(\pi) = \mathrm{T}_n(K)$，所以根据群同态基本定理，有：

$$\mathrm{Aff}_n(K)/\mathrm{T}_n(K) \cong \mathrm{GL}_n(K)$$

类似地，我们有：

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)/\mathrm{T}_n(\mathbb{R}) \cong \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$$

对于任意 $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$，我们可以把它写成至多 $n+1$ 个反射的复合。如果 f 保持原点，之前已经说明过它可以写成至多 n 个反射的复合；如果它不保持原点，我们可以用一个反射把 $f(0)$ 映为 0，这样就把它转化为了第一种情况。据此我们可以把二维平面上的等距同构根据反射复合的个数进行分类，分为反射、旋转、平移、滑移反射四种。前两种变换有不动点，而后两种没有。

要想更本质地概括这一部分讨论的结果，我们还是需要引入半直积的概念。

▶ **定义 1.13:**

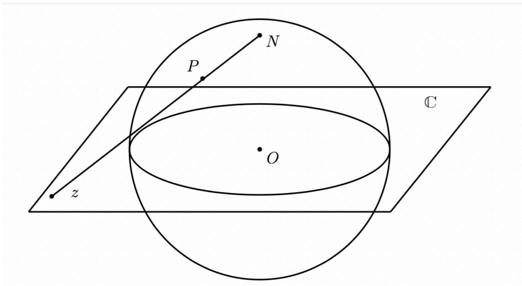
2 Möbius 群

Möbius 群是黎曼球面上的保角自同构群，我们将利用它引入复平面上变换与双曲几何的一些基础概念。

▶ **定义 2.1: 在复平面上添加无穷远点 ∞ 就扩展得到黎曼球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$。**

$\hat{\mathbb{C}}$ 与嵌入 $\mathbb{R}^3$ 的二维球面 S^2 可以通过球极投影 SP 一一对应起来，其定义如下：

$$\mathrm{SP} : S^2 \to \hat{\mathbb{C}}, (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$



不难发现 $\mathrm{SP}(N) = \infty$，其中 N 为 S^2 上的北极点。SP 的逆映射为：

$$\mathrm{SP}^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \to S^2, z \mapsto \left(\frac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2\mathrm{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

如果把 $\mathbb{C}$ 上的直接看做连接到 ∞ 的"圆"，那么球极投影可以把 S^2 上的圆映为 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的圆，只需把 S^2 上的圆分为经过 N 与不经过 N 的两类加以验证就可证明这一性质。

我们接下来讨论黎曼球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的一些常见变换。

▶ **例 2.1:**

仿射变换：

$$\varphi : z \mapsto az + b, a \neq 0$$

当 a 的模长为 1 时，该变换为一个等距同构。显然仿射变换把 ∞ 映为 ∞。除此之外，常见的变换还有反演变换：

$$T : z \mapsto \frac{1}{z}$$

反演变换把 0 与 ∞ 对应起来。仿射变换与反演变换都是共形变换，即保持向量之间的夹角。

仿射变换和反演变换都具有保圆性，即把 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的圆映为圆，具体验证过程略去。

▶ **定义 2.2:** Möbius **变换即是** $\hat{\mathbb{C}}$ **上的分式线性映射**:

$$f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$$

不难看出，Möbius 变换包含着仿射变换与反演变换；另一方面，任一 Möbius 变换都可以表示为仿射变换与反演变换的复合：

$$f_1 : z \mapsto cz + d, f_2 : z \mapsto \frac{1}{z}, f_3 : z \mapsto \left(b - \frac{ad}{c}\right) z + \frac{a}{c} \Rightarrow f = f_3 f_2 f_1$$

所以 Möbius 变换也具有保圆性。同时，不难验证：Möbius 变换必定可逆，且其逆也为 Möbius 变换；Möbius 变换的复合也是 Möbius 变换。这使我们可以把 Möbius 变换与群联系起来。

▶ **定义 2.3:** $\hat{\mathbb{C}}$ **上全体** Möbius **变换构成一个群，称为** Möbius **群，记为** $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$。

我们希望把 Möbius 群与已知的群联系起来，以便了解它的性质。通过计算 Möbius 变换的复合与逆，我们不难发现其与矩阵乘法之间的相似性。实际上，我们有如下关系：

$$\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^* = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm I\}$$

其中 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ 是一个射影线性群。以上的同构关系由以下映射给出：

$$\rho : \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^*, \left(f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right) \mapsto \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]$$

所以 $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ 中的任一元素都对应于两个行列式为 1 的二阶复矩阵，且 $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ 中的映射复合可对应于矩阵的乘法运算。更进一步，我们可以把 Möbius 变换对 $\hat{\mathbb{C}}$ 上元素的作用也用矩阵乘法表示，只需使用如下表示：

$$z \mapsto [z : 1], \infty \mapsto [1 : 0]$$

其中 $[z : 1], [1 : 0] \in \mathbb{P}^1$，$\mathbb{P}^1$ 为一个复射影空间，其中的元素可看成坐标向量模去非零复数。这样 Möbius 变换就可以表示为：

$$f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1, v \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} v$$

映射 f 的不动点 p 被定义为使 $f(p) = p$ 成立的点。在矩阵的表示下，Möbius 变换的不动点可以与矩阵的特征向量联系起来，即如果 z 是 Möbius 变换 f 的不动点，则 z 对应 $\mathbb{P}^1$ 中的向量是 f 对应矩阵的一个特征向量。

▶ **命题 2.1:**

（1）Möbius 变换只能有一个或两个不动点。

（2）若两个非恒等的 Möbius 变换具有相同的不动点，则它们可交换。

证明方法是将特征向量扩张为 $\mathbb{C}^2$ 上的一组基，进而考虑在这组基下矩阵的可交换性。线性代数告诉我们，两个矩阵可交换，意味着它们至少有一个公共的特征向量，但不意味着它们有着完全相同的特征向量。所以 $z \mapsto z+1$ 与 $z \mapsto 2z+2$ 虽然可交换，但并不具有相同的不动点。

利用球极投影（$f = \mathrm{SP}\varphi\mathrm{SP}^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$），我们可以把 Möbius 变换看成 S^2 上的变换。比如我们考虑 S^2 上的一个转动 $R \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$，它可以看做是绕 e_1, e_2, e_3 三个轴的旋转的合成。记 $R_i(\theta)$ 表示绕轴 e_i 旋转 θ 角，不难发现 $R_3(\theta)$ 在球极投影后相当于在 $\hat{\mathbb{C}}$ 上绕原点做一次转动。即 $R_3(\theta)$ 对应如下 Möbius 变换：

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

另一个例子是 $R_2(\pi/2) : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3, x_2, -x_1)$，直接检验可知它也对应一个 Möbius 变换。这样我们就能得到：

$$R_1(\theta) = R_2(\pi/2)R_3(\theta)R_2^{-1}(\pi/2)$$

也对应一个 Möbius 变换，$R_2\theta$ 同理。所以 S^2 上的转动全都包含于 Möbius 变换，即 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 可自然看为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm I\}$ 的子群。更进一步，在 Möbius 变换的背景下，我们可以构造出如下同构关系：

$$\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SU}(2)/\{\pm I\}$$

记 Möbius 变换 $f \in \mathrm{SU}(2)/\{\pm I\}$ 以及 S^2 上转动 $R \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$，考虑映射：

$$\varphi : \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{SU}(2)/\{\pm I\}, R \mapsto f = \mathrm{SP} \circ R \circ \mathrm{SP}^{-1}$$

下面我们来证明 φ 是一个良好定义的群同构：

证明:

S^2 上的一对对径点 $p, -p$ 满足：

$$\mathrm{SP}(p) = z \Rightarrow \mathrm{SP}(-p) = -\frac{1}{\bar{z}}$$

且易知 S^2 上的转动 R 必定把球面上的一对对径点映为一对对径点，所以：

$$\varphi(R)\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = -\frac{1}{\overline{\varphi(R)(z)}}$$

不难验证满足该条件的 $\varphi(R)$ 必定落在 $\mathrm{SU}(2)/\{\pm I\}$ 中。

反之，我们任取 $g \in \mathrm{SU}(2)/\{\pm I\}$，不妨记 $g(0) = z_0$。取 S^2 上一个转动 R' 使得 $R'(\mathrm{SP}^{-1}(z_0)) = \mathrm{SP}^{-1}(0)$。由之前证明可知 $\varphi(R') \in \mathrm{SU}(2)/\{\pm I\}$，则复合 $\varphi(R')g = [\mathrm{diag}(\exp(i\theta), \exp(-i\theta))]$，不难得到 g 对应 S^2 的两个旋转的复合——即一个旋转。

▶ **例 2.2: 反演变换对应于矩阵：**

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

所以可通过球面旋转来实现。

接下来，我们希望寻找 Möbius 群中的"不变量"，借此深入讨论它的性质。

▶ **定义 2.4: 给定 $\hat{\mathbb{C}}$ 上四个不同的点 z_1, z_2, z_3, z_4，定义它们的交比（cross-ratio）为：**

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

3 基本群

我们已经定义过了一般的度量空间，对度量空间进一步抽象，我们就能得到更为广泛的一种结构——即拓扑空间。注意我们会给出拓扑空间的严格定义，但这并不是这门课的重点。

▶ **定义 3.1: 设 X 是一个非空集合，X 的一个子集族 τ 称为 X 的一个拓扑，如果它满足：**

（1）$X, \varnothing$ **都包含在** τ **中。**

（2）τ **中任意多个元素的并集仍在** τ **中。**

（3）τ **中有限多个元素的交集仍在** τ **中。**

集合 X 和它的一个拓扑 τ 一起称为一个拓扑空间，记作 (X, τ)，称 τ 中的元素为这个拓扑空间的开集。

拓扑空间就是定义了开集的集合。定义了开集，也就定义了开集的补集——闭集。讨论拓扑空间之间的映射时，我们一般考虑连续映射：

▶ **定义 3.2: 设 X, Y 都是拓扑空间，$f : X \to Y$ 是一个映射。如果对于 Y 中的任一开集 V，$f^{-1}(V)$ 总是 X 中的开集，则称 f 是连续映射。**

记度量空间中的开球为 $B(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) < r\}$，定义开集 U 满足对任意 $x_0 \in U$，都存在 $r > 0$，使得 $B(x_0, r) \subset U$，这样度量空间就具有了拓扑结构。度量空间中的连续映射也就与我们熟知的定义等价了：

▶ **定义 3.3: 设 X, Y 是两个度量空间。映射 $f : X \to Y$ 称为是连续的，如果**

$$\forall x_0 \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon).$$

两个可能会用到的引理：

▶ **引理 3.1: 设 X, Y, Z 是拓扑空间，$f : X \to Y, g : Y \to Z$ 是连续映射。则 $g \circ f : X \to Z$ 也是连续的。**

▶ **引理 3.2: （粘接引理）**

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 X 的一个有限闭覆盖（每个集合都是闭集）。如果 $f : X \to Y$ 在每个 A_i 上的限制都是连续的，则 f 是连续映射。

后续的讨论我们必定会牺牲严谨性，但这些牺牲日后都是可以弥补回来的。下面我们开始介绍拓扑空间的道路连通性：

▶ **定义 3.4: 拓扑空间 X 上的一个路径（path）指的是一个连续的映射**

$$\gamma : I = [0, 1] \to X.$$

其中 $\gamma(0)=x_0$ 称为路径的起点，$\gamma(1)=x_1$ 称为路径的终点。γ 称为从 x_0 到 x_1 的一条路径。另外：

a）$\gamma^{-1}:I\to X,t\mapsto\gamma(1-t)$ **称为 γ 的逆路径。**

b）**如果 $\gamma(0)=\gamma(1)$，我们称 γ 为一个圈（loop）。此时 γ 实际上给出了一个连续映射 $S^1\to X$。**

c）**如果 $\gamma(t)=x_0,\forall t\in I$，我们称 γ 为一个常值路径，记为 i_{x_0}。**

d）**设 γ_1,γ_2 为两条路径，并且 $\gamma_1(1)=\gamma_2(0)$。我们定义它们的乘积为**

$$\gamma_2\times\gamma_1:I\to X,t\mapsto\begin{cases}\gamma_1(2t), & 0\leq t\leq\dfrac{1}{2}\\ \gamma_2(2t-1), & \dfrac{1}{2}\leq t\leq 1\end{cases}$$

注: d）中两条路径的乘积也是一条路径，我们只需验证 $t=1/2$ 处的连续性即可。

路径的定义是我们建立基本群的基础。不难发现，我们可以在拓扑空间 X 上定义一个等价关系：

$$x_0\sim x_1\Leftrightarrow \text{存在从 } x_0 \text{ 到 } x_1 \text{ 的一条路径}$$

一如既往，等价关系给出了空间的一个拆分：

▶ **定义 3.5: X 上等价关系 $\sim$ 的每一个等价类称为 X 的一个道路连通分支，X 的所有道路连通分支构成了 X 的一个拆分。记**

$$\pi_0(X)=X/\sim=\{\text{道路连通分支}\}$$

为 X 中所有道路连通分支的集合。如果 X 只有一个道路连通分支，我们称 X 为道路连通的。

▶ **命题 3.1: 设 $f:X\to Y$ 是一个连续映射，则 f 将 X 中的道路连通分支映射到 Y 中的道路连通分支中。特别地，f 诱导了映射：**

$$f_*:\pi_0(X)\to\pi_0(Y).$$

证明: 只需证明若 $x_0\sim x_1$，则 $f(x_0)\sim f(x_1)$。由于 $x_0\sim x_1$，则存在从 x_0 到 x_1 的路径 γ，不难验证复合 $f\gamma$ 就是从 $f(x_0)$ 到 $f(x_1)$ 的一条路径。

上述命题说明我们在讨论空间之间的连续映射时，只需要独立考察在每个道路连通分支上的情形。因此，我们通常假设空间是道路连通的。

▶ **例 3.1: 从直观上可以判断，S^n、I^n 以及 $X=x$ 轴 $\cup\, y$ 轴 $\cup\, z$ 轴 都是道路连通的。**

▶ **例 3.2: 定义 $\mathbb{R}^2$ 度量空间的子集：**

$$X=\{(x,\sin\frac{1}{x})|x\in\mathbb{R}-\{0\}\}\cup\{(0,y)|-1\leq y\leq 1\}$$

X 被称为“拓扑学家的 sine 曲线”，它是一个典型的“连通但不道路连通”的例子。

之后我们就将进入代数拓扑的部分，但在这之前，为了把繁杂的结论组织起来并给出更自然的理解，我们不妨引入一点点范畴的语言。

▶ **定义 3.6: 一个范畴 $\mathcal{C}$ 由如下资料组成:**

1）范畴 $\mathcal{C}$ 的对象：$\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$。

2）范畴 $\mathcal{C}$ 的态射：对于 $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$。其中 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$，可记：

$$f : A \to B \quad \text{or} \quad A \xrightarrow{f} B$$

3）复合：对任意 $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，以及 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$，存在 $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$。而且满足：

（1）复合满足结合律。

（2）存在恒等态射：对任意 $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，存在 $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$，使得：

$$f \circ 1_A = 1_B \circ f = f, \forall A \xrightarrow{f} B$$

常见的范畴有：所有集合构成的范畴 Set（态射为映射），所有群构成的范畴 Grp（态射为群同态），所有 Abel 群构成的范畴 Ab（态射为群同态），所有拓扑空间构成的范畴 Top（态射为连续映射）。

▶ **定义 3.7: 对于从 A 到 B 的态射 f，如果存在从 B 到 A 的态射 g，使得:**

$$f \circ g = 1_B, g \circ f = 1_A$$

则称 f 是一个可逆态射，且称存在可逆态射的 A, B 是等价的。

▶ **定义 3.8: 如果一个范畴中的所有态射都是可逆的，则称这个范畴为广群。**

▶ **定义 3.9: 如果范畴 $\mathcal{C}', \mathcal{C}$ 满足:**

（1）$\mathrm{Obj}(\mathcal{C}') \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$。

（2）$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), \forall A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$。

（3）$\mathcal{C}'$ 中态射的合成由 $\mathcal{C}$ 限制得到。

则称 $\mathcal{C}'$ 是 $\mathcal{C}$ 的子范畴。如果 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), \forall A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$，则称 $\mathcal{C}'$ 是 $\mathcal{C}$ 的全子范畴。

显然 Ab 是 Grp 的全子范畴。

▶ **定义 3.10: 如果 $\sim$ 是定义在每个 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 上的一个等价关系，满足（相当于态射等价类的复合）:**

$$f_1 \sim f_2, g_1 \sim g_2 \Rightarrow g_1 \circ f_1 \sim g_2 \circ f_2$$

则我们可以定义商范畴 $\mathcal{C}' = \mathcal{C}/\sim$，满足：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)/\sim, \forall A,B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$$

在拓扑范畴 Top 上，我们希望定义一个连续映射之间的等价关系，来构造商范畴，这个等价关系便是同伦：

▶ **定义 3.11: 设 X,Y 为两个拓扑空间，如果 $f_0, f_1 : X \to Y$ 满足：**

$$\exists F : X \times I \to Y, s.t. F|_{X\times 0} = f_0, F|_{X\times 1} = f_1$$

则称 f_0, f_1 是同伦的，记为 $f_0 \simeq f_1$。

有时我们需要映射同伦保持一个子集不动：如果对于 $A \subset X$，有 $f_0|A = f_1|A$，而且 $F|A \times t = f_0|A, \forall t \in I$，那么在 $f_0 \simeq f_1$ 的基础上我们称 f_1, f_1 相对 A 同伦，记为：

$$f_0 \simeq f_1 \mathrm{rel} A$$

同伦定义了 Top 上的等价关系，我们只需再验证：

$$f_0 \simeq f_1, g_0 \simeq g_1 \Rightarrow g_0 f_0 \simeq g_1 f_1$$

即可定义一个商范畴。不妨设 f_0 到 f_1 的同伦为 F，g_0 到 g_1 的同伦为 G。再设 $\overline{F}$ 为 F 的"柱化"，即

$$\overline{F} : (x,t) \mapsto (F(x,t), t)$$

则 $G\overline{F}$ 就是 $g_0 f_0$ 到 $g_1 f_1$ 的同伦。所以我们可以定义商范畴：

$$\mathrm{hTop} = \mathrm{Top}/\simeq$$

并记：

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{hTop}}(X,Y) = [X,Y]$$

$[X,Y]$ 即为从 X 到 Y 的所有连续映射等价类的集合。

▶ **定义 3.12: 如果两个拓扑空间 X,Y 在 Top 中是等价的，则称它们是同胚的，记为 $X \cong Y$；如果两个拓扑空间 X,Y 在 hTop 中是等价的，则称它们是同伦等价的，记为 $X \simeq Y$。**

显然，拓扑空间的同胚关系蕴含同伦关系，但有时同胚关系太强了，我们需要一个较弱的等价关系，同伦关系就是其中一种。

▶ **例 3.3: 常见同胚关系：**

（1）$\mathbb{R}^1$ 的开区间同胚于 $\mathbb{R}^1$。比如：

$$f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^1, x \mapsto \tan x$$

（2）$\mathbb{R}^n$ 中的单位球体 D^n 的“内部”$\widetilde{D}^n$ 同胚于 $\mathbb{R}^n$：

$$f:\mathbb{R}^n\to\widetilde{D}^n, x\mapsto\frac{x}{1+||x||}$$

（3）$\mathbb{R}^n-\{O\}\cong\mathbb{R}^n-D^n$，同胚映射为：

$$f:\mathbb{R}^n-\{O\}\to\mathbb{R}^n-D^n, x\mapsto x+\frac{x}{||x||}$$

（4）通过球极投影，我们可得 $\mathbb{R}^2\cong S^2-\{N\}$（$N$ 为北极点）。

（5）所有凸多边形都互相同胚（通过分割三角形之间的仿射变换），并且都同胚于 D^2（通过 $(x,y)\mapsto(\sqrt{x},\sqrt{y})$）。

为了进一步的讨论，我们还需要引入函子的概念。

▶ 定义 3.13: 设 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 为两个范畴。一个函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 包含以下资料：

（1）对象之间的映射 $F:\mathrm{Obj}(\mathcal{C})\to\mathrm{Obj}(\mathcal{D}), A\mapsto F(A)$。

（2）态射之间的映射：对任意 $A,B\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，都有

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A),F(B))$$

可记为：

$$A\xrightarrow{f}B\Rightarrow F(A)\xrightarrow{F(f)}F(B)$$

（3）满足：

$$F(g\circ f)=F(g)\circ F(f),\forall A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$$
$$F(1_A)=1_{F(A)},\forall A\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$$

特别地，如果 $F:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A),F(B))$ 是单射，则称 F 是忠实的 (faithful)。

▶ 命题 3.2: 设 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个函子。若 $f:A\to B$ 是可逆的，则 $F(f):F(A)\to F(B)$ 也是可逆的。

我们之前定义了道路连通分支 $\pi_0(X)$，实际上 $\pi_0:\mathrm{hTop}\to\mathrm{Set}$ 定义了一个函子。若 f 是 hTop 中的态射，则 $\pi_0(f)$ 就是它诱导出的映射 f_*。作为推论，如果 $X\simeq Y$，则 $\pi_0(X)$ 与 $\pi_0(Y)$ 作为集合是同构的。

▶ 定义 3.14: 设 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 为两个范畴，$F,G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 为两个函子。则 F,G 之间的自然变换 $\tau:F\to G$ 指的是一组态射：

$$\tau=\{\tau_A:F(A)\to G(A)|\forall A\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})\}$$

使得下面的图表交换：

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ {\scriptstyle\tau_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau_B} \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}$$

如果对于任意 $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，$\tau_A$ 都是可逆的，则称 τ 是一个自然等价，记 $F \simeq G$。

一种看法是把自然变换与同伦对比起来。我们一般就认为自然变换是两个函子之间的态射。与拓扑空间类似，我们可以借此定义两个范畴之间的等价关系：

▶ **定义 3.15: 如果两个范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 之间存在函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$，使得 $F \circ G = 1_{\mathcal{D}}, G \circ F = 1_{\mathcal{C}}$，则称它们是同构的；如果存在函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$，使得 $F \circ G \simeq 1_{\mathcal{D}}, G \circ F \simeq 1_{\mathcal{C}}$，则称它们是等价的。**

最后我们给出函子范畴：对于范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$，如果 $\mathcal{C}$ 的对象都是集合，那么我们可以定义范畴 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$，其对象是 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 之间的函子，态射即是函子之间的自然变换。

接下来我们就要逐步给出拓扑空间的基本群。

▶ **定义 3.16: 通过保持端点不同的同伦，我们定义道路类：**

$$[\gamma] = \{\widetilde{\gamma} : I \to X | \widetilde{\gamma} \simeq \gamma \text{ rel } \partial I = \{0, 1\}\}$$

路径乘法不满足结合律，但它定义在道路类上时（$[\beta] \times [\gamma] = [\beta] \times [\gamma]]$）是结合的，即：

$$(\gamma_3 \times \gamma_2) \times \gamma_1 \simeq \gamma_3 \times (\gamma_2 \times \gamma_1) \text{ rel } \partial I$$

结合逆路径和常值路径的性质，我们可以给出如下构造：

▶ **定理 3.1: 设 X 为一个拓扑空间。定义范畴 $\Pi_1(X)$ 为：**

(1) $\mathrm{Obj}(\Pi_1(X)) = X$。

(2) $\mathrm{Hom}_{\Pi_1(X)}(x_0, x_1) = \{$从 x_0 到 x_1 的道路类$\}$

(3) $1_{x_0} = i_{x_0}$。

这样定义的范畴 $\Pi_1(X)$ 是一个广群。

我们称 $\Pi_1(X)$ 是 X 的基本广群。对于一般的广群 $\mathcal{C}$，任意 $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，自然可构造群：

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$$

任意 $f : A \to B$，诱导群同态：

$$\mathrm{Ad}_f : \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(A) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(B), g \mapsto f \circ g \circ f^{-1}$$

这样就自然定义了函子：

$$F : \mathcal{C} \to \mathrm{Grp}, A \mapsto \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(A), f \mapsto \mathrm{Ad}_f$$

根据这个方法，我们定义了函子：

$$\Pi_1(X) \to \mathrm{Grp}$$

▶ **定义 3.17: 设 $x_0 \in X$，定义：**

$$\pi_1(X, x_0) = \mathrm{Aut}_{\Pi_1(X)}(x_0)$$

为 X 在 x_0 处的基本群。

当 X 为道路连通空间时，它每一点处的基本群都是同构的（群同构为 $[\gamma] \mapsto [\beta\gamma\beta^{-1}]$，$\beta$ 为从 x_0 到 x_1 的一条路径），所以我们可以简记 X 的基本群为 $\pi_1(X)$。

对于连续映射 $f : X \to Y$，我们可以定义函子：

$$\Pi_1(f) : \Pi_1(X) \to \Pi_1(Y), x \mapsto f(x), [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$$

实际上，我们有函子：

$$\Pi_1 : \mathrm{Top} \to \mathrm{Groupoid}, X \mapsto \Pi_1(X), f \mapsto \Pi_1(f)$$

Groupoid 表示广群构成的范畴，其态射即是广群之间的函子。

我们之前提及过自然变换与同伦之间的联系，下面这个命题解释了这一点：

▶ **命题 3.3: 设 $f, g : X \to Y$ 是同伦的，且由 F 给出。定义道路类：**

$$\tau_{x_0} = [F|_{x_0 \times I}] \in \mathrm{Hom}_{\Pi_1(Y)}(f(x_0), g(x_0))$$

这样 τ 就定义了一个自然变换：

$$\tau : \Pi_1(f) \Rightarrow \Pi_1(g)$$

这个命题说明了 f, g 之间的同伦确定了 $\Pi(f), \Pi(g)$ 之间的自然变换。自然就会得到：

▶ **定理 3.2: 如果 $X \simeq Y$，$f : X \to Y$ 是同伦等价，则：**

$$\Pi_1(f) : \Pi_1(X) \to \Pi_1(Y)$$

确定了范畴的等价。特别地，有：

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, f(x_0))$$

举一些基本群的例子：

接下来，我们就不再使用更多范畴的语言了。比起严格的理论，我们更想借助一些例子来一窥拓扑的“样貌”。我们发现虽然已经严格定义了基本群，但计算一个具体的基本群仍然是十分困难的，我们迫切需要一个简化问题的方法来帮助我们求出常见空间的基本群。

我们从一类特殊而常见的连续映射说起（注意，为了简化问题，我们只考虑道路连通的空间）：

▶ **定义 3.18: 如果一个连续映射** $p : X \to Y$**，满足对于任意** $y \in Y$**，都存在一个包含** y **的开集** V**，使得** V **的原像是** X **中一列开集** U_α **的不交并，即：**

$$p^{-1}(V) = \coprod_\alpha U_\alpha$$

并且对每个 U_α**，**$p|_{U_\alpha} : U_\alpha \to V$ **都是一个同胚，那么称** p **是一个覆盖映射（**covering map**），同时称** X **是** Y **的一个覆盖。**

这个定义说明了，在局部上看 X, Y 是相似的，但整体上看可能有很大差别。

▶ **例 3.4:** $\mathrm{Ex} : \mathbb{R} \to S^1$ **是一个覆盖映射。**

基本群在覆盖映射下有比较好的性质：

▶ **定理 3.3:**